

### Amélioration de la méthode du point moyen

Dans ce problème,  $a$  et  $b$  sont deux réels donnés, avec  $a < b$ . On note  $c = \frac{a+b}{2}$ .

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ . On pourra noter  $\Gamma$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $Oxy$ , et  $A, B, C$  les points de  $\Gamma$  d'abscisses respectives  $a, b, c$ .

1. Question de cours : rappeler en quoi consiste l'approximation de l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  par la méthode du trapèze, quelle est son interprétation géométrique, et quel est un majorant (en valeur absolue) de l'erreur commise dans cette approximation.

2. (a) Justifier que pour tout  $x$  de  $[a, b]$ , on a  $|f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)| \leq \frac{M_2}{2}(x - c)^2$ .

(b) En déduire  $\left| \int_a^b f(x) dx - (b - a)f(c) \right| \leq \frac{M_2}{24}(b - a)^3$ .  
On appelle "règle du point-moyen" l'approximation  $\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)f(c)$ .

(c) Donner une interprétation géométrique de la règle du point-moyen.

Déduire des questions (1) et (2) un encadrement de l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  selon que l'application  $f$  est convexe ou concave sur ce segment.

(d) Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n - 1\}$  on note  $c_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b - a}{n}$ .

Majorer l'erreur (en valeur absolue) dans :  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$ .

3. On pose  $J(f) = \int_a^b f(x) dx - (b - a)f(c) - \frac{(b - a)^2}{24}(f'(b) - f'(a))$

(a) Calculer  $J(f)$  quand : a)  $f(x) \equiv 1$  b)  $f(x) \equiv x$  c)  $f(x) \equiv x^2$  d)  $f(x) \equiv x^3$ .

(b) En déduire  $J(f)$  quand  $f$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

4. Soit  $g : I = [-\omega, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$  une application impaire et de classe  $\mathcal{C}^5$ , avec  $\omega > 0$  fixé.

Soit  $N_5$  un majorant de  $|g^{(5)}(t)|$  sur  $I$ . Soit  $u$  un élément donné de  $I$ .

(a) Calculer l'intégrale  $K(u) = \int_0^u (u - t)^2(u^2 + 2ut - t^2) dt$ .

(b) Prouver l'égalité  $g(u) = ug'(0) + \frac{u^3}{6}g^{(3)}(0) + \frac{1}{24} \int_0^u (u - t)^4 g^{(5)} dt$ .

(c) Etablir  $g''(u) = ug^{(3)}(0) + \frac{1}{2} \int_0^u (u - t)^2 g^{(5)} dt$ .

(d) En déduire que  $\left|g(u) - ug'(0) - \frac{u^2}{6}g''(u)\right| \leq \frac{7N_5}{360} |u|^5$ .

5. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^4$  sur  $[a, b]$  et on note  $M_4 = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$ .

En posant  $g(u) = \int_{c-u}^{c+u} f(x) dx$  déduire de ce qui précède la majoration :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b - a)f(c) - \frac{(b - a)^2}{24}(f'(b) - f'(a)) \right| \leq \frac{7M_4}{5760}(b - a)^5$$

Retrouver à cette occasion les résultats de la question (3).

6. Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n - 1\}$  on note  $c_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b - a}{n}$ .

Donner une majoration de l'erreur (en valeur absolue) dans l'approximation :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) + \frac{(b - a)^2}{24n^2}(f'(b) - f'(a)). \text{ Any comment ?}$$