# Un produit scalaire entre polynômes

## Partie I

Pour tout $P$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $\varphi(P) = (1-X^2)P'' - 3XP'$.

1. (a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, calculer $\varphi(X^k)$.
   (c) Pour tout $P$ de $\mathbb{R}[X]$, calculer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de $P$.
   (d) Quel est le noyau de $\varphi$ ? L'endomorphisme $\varphi$ est-il surjectif ?
2. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $\varphi_n$ la restriction de $\varphi_n$ de $\varphi$ à $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $\varphi_n$.
   (b) Écrire la matrice $A_n$ de $\varphi_n$ dans la base $1, X, \ldots, X^n$.
   (c) Préciser le rang de $\varphi_n - \lambda\mathrm{Id}$ suivant les valeurs du réel $\lambda$.
3. Dans cette question, $n$ est un entier naturel fixé quelconque.
   On pose $\lambda_n = -n(n+2)$. On note $E_n = \ker(\varphi - \lambda_n \mathrm{Id}) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = \lambda_n P\}$.
   (a) Montrer que tout élément non nul de $E_n$ est nécessairement de degré $n$.
   (b) Inversement montrer que $E_n$ est une droite vectorielle (utiliser (2c)).
   Dans la suite de ce problème, on notera $U_n$ l'unique polynôme unitaire de $E_n$.
4. Ainsi $U_n$ est l'unique polynôme unitaire tel que $\varphi(U_n) = \lambda_n U_n$ (il est de degré $n$).
   (a) Calculer les polynômes $U_0, U_1, U_2$ et $U_3$.
   (b) Montrer que $U_n$ a la parité de $n$ (indication : considérer $V_n(X) = (-1)^n U_n(-X)$).
   (c) Si $n \geqslant 2$, montrer que le coefficient de $X^{n-2}$ dans $U_n$ est $\dfrac{1-n}{4}$.

## Partie II

Pour tous $P, Q$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Il est clair que pour tous $A, B, C$ de $\mathbb{R}[X]$, on a $(AB \mid C) = (A \mid BC)$.
   (b) Montrer que pour tous $P, Q$ de $\mathbb{R}[X]$, on a $(\varphi(P) \mid Q) = (P \mid \varphi(Q))$.
   Indication : on pourra considérer l'application $t \mapsto \Big((1-t^2)^{3/2}P'(t)\Big)'$.
2. (a) Montrer que $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.
   (b) En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, et pour tout $Q$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $(U_n \mid Q) = 0$.
3. (a) Montrer que $U_n - XU_{n-1}$ est de degré au plus $n-1$ et qu'il est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à $n-2$ (pour $n \geqslant 3$).
   (b) En déduire que $U_n - XU_{n-1}$ est combinaison linéaire de $U_{n-1}$ et de $U_{n-2}$
   (c) En utilisant (I.4), montrer que $4U_n - 4XU_{n-1} + U_{n-2} = 0$ pour $n \geqslant 2$.
   (d) Calculer $U_n(1)$.
4. (a) Montrer que pour tout réel $\theta$, $\sin(n+1)\theta = 2^n(\sin\theta)U_n(\cos\theta)$ (utiliser (II.3b)).
   (b) En déduire les différentes racines de $U_n$.