On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Calcul de l'inverse de A**
   (a) Calculer $A^2 - 3A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (b) Retrouver l'inversibilité de A et la valeur de A^{-1} par la méthode du pivot.

2. **Calcul des puissances de A**
   (a) *Première méthode*
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $B_n = A^n + A - 2I$ (par convention $A^0 = I$.)
      i. Montrer successivement que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
      $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n\,;\quad A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I\,;\quad B_{n+2} = 2B_{n+1}$
      ii. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

   (b) *Deuxième méthode*
   On pose $C = A - I$ et $D = 2I - A$.
      i. Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer C^n et D^n.
      ii. Exprimer A en fonction de C et D. Retrouver ainsi A^n pour n dans $\mathbb{N}$.

   (c) *Troisième méthode*
      i. Montrer qu'il existe des suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ telles que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I$.
      ii. Calculer α_n et β_n et retrouver ainsi l'expression de A^n.

   (d) *Quatrième méthode*
   On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
      i. Calculer P^{-1} puis $\Delta = P^{-1}AP$.
      ii. En déduire à nouveau l'expression de A^n, pour tout n de $\mathbb{N}$.

   (e) *Puissances négatives de A*
   La formule donnant A^n est-elle encore vraie pour les exposants strictement négatifs ?

3. **Matrices commutant avec A**
   Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}(M) = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ MN = NM\}$.
   (a) Pour M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{C}(M)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer si N est inversible, alors $N \in \mathcal{C}(M) \Rightarrow N^{-1} \in \mathcal{C}(M)$.
   (c) Déterminer $\mathcal{C}(\Delta)$.
   (d) Soient M, N dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et soit Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer l'équivalence : $N \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow Q^{-1}NQ \in \mathcal{C}(Q^{-1}MQ)$.
   (e) En utilisant la question $(2.d.i)$, déterminer $\mathcal{C}(A)$.
   Indication : on cherchera à obtenir le résultat sous la forme $N = \sum_{k=1}^{5} \lambda_k J_k$, où les λ_k sont des réels quelconques et où les J_k sont des éléments fixés de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.