TD n°11 : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Dans cette partie, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$, pour tout entier naturel n.

1. (a) Montrer que la suite $n \mapsto I_n$ est décroissante et convergente.

   (b) Pour tout a de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant a + \dfrac{\pi}{2}\cos^n a$.

   En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, trouver une relation entre I_n et I_{n-2}.

   (b) En déduire l'expression de I_{2n} et de I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

3. (a) Montrer que la suite $n \mapsto u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ est constante et calculer sa valeur.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, et en déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Appliquer la formule d'intégration approchée par la méthode du trapèze à $x \mapsto \ln x$ sur le segment $[n, n+1]$ et en déduire l'inégalité $0 \leqslant \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$.

5. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \ln\left(n^n \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n}\right) - \ln(n!)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$.

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

   (b) On note $C = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

   Montrer l'égalité $2u_n - u_{2n} = \ln\left(\dfrac{I_{2n}\sqrt{2n}}{\pi}\right)$ et en déduire $C = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

   (c) Prouver finalement la formule de Stirling : $n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.