TD n°10 : étude de fonction, et suite récurrente

On définit une fonction f par : $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Etudier les variations de f et construire son graphe Γ dans un repère orthonormé.
   On précisera le point d'inflexion I et la demi-tangente au point d'arrêt.
2. (a) Déterminer le point A de Γ, distinct de O, en lequel la tangente à Γ passe par O.

   (b) Montrer qu'il existe deux points de Γ, distincts de A, et deux seulement, en lesquels la tangente à Γ est parallèle à OA. On notera α et β ($\alpha < \beta$) les abscisses de ces points (qu'on ne demande pas de calculer).
3. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{1 - 2\ln|x|}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

   (a) Etudier les variations et tracer le graphe $\mathcal{C}$ de g dans un repère orthonormé (unité 2cm). On précisera la concavité de $\mathcal{C}$.

   (b) Montrer que $g(x) = x \Leftrightarrow x \in \{\alpha, \beta, 0, 1\}$.

   (c) Etudier $g(x) - x$ sur $[0, 1]$.
   En déduire : $\forall\, x \in]0, \beta[,\ x < g(x) < \beta$, et $\forall\, x \in]\beta, 1[,\ \beta < g(x) < x$.

   (d) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $0 < u_0 < 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$.
   Montrer qu'elle converge vers β.

   (e) Calculer β à 10^{-2} près, avec successivement $u_0 = 0,2$ et $u_0 = 0,4$ (on fera figurer les résultats intermédiaires).

   (f) Montrer que $-2,10 < \alpha < -2,09$.