TD n°9 : une équation fonctionnelle

On se propose de déterminer les applications $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$\forall\, x \geqslant 0,\ f(x^2) = f(x)^2$$

Dans toute la suite, on suppose que f est une solution du problème.

1. (a) Montrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.
   (b) A quelle condition l'application f peut-elle être constante ?
2. Soit a un élément de $]0, 1[$. On pose $u_n = f(a^{2^n})$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
   (b) Montrer que $f(a) \leqslant 1$.
   (c) Montrer que si $f(a) = 1$, alors f est constante sur $[0, 1]$.
   (d) Que dire de $f(a)$ si f n'est pas constante sur $[0, 1]$? Que vaut alors $f(0)$?
3. Soit a un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $v_n = f(a^{2^{-n}})$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.
   (b) Montrer que si $f(a) = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) On suppose que f n'est pas constante. Que vaut $f(1)$?
4. Dans cette question, on suppose que l'application f n'est pas constante.
   (a) Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) On définit une application g sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall\, x > 0,\ g(x) = \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$.
   Exprimer $g(x^2)$ en fonction de $g(x)$.
   (c) Montrer que g est constante.
   (d) En déduire toutes les solutions du problème initial.
   Parmi ces solutions, quelles sont celles qui sont dérivables à droite en 0 ?