TD n°7 : moyennes arithmétique, géométrique, harmonique

Exercice 1

1. Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, tels que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant n$ (cas d'égalité ?).

   Indication : par récurrence sur n. On pourra rapporcher le plus petit et le plus grand des x_k.
2. Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $y_1, y_2, \cdots, y_n$ un réarrangement quelconque de $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

   Montrer que $\dfrac{y_1}{x_1} + \dfrac{y_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{y_n}{x_n} \geqslant n$.

Exercice 2

Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. On note $A_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, $G_n = \Big(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\Big)^{1/n}$ et $H_n = n\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)^{-1}$

On dit que A_n (resp. G_n, H_n) est la moyenne arithmétique (resp. géométrique, harmonique) des a_k.

Prouver la double inégalité : $A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$.

Indication : utiliser l'exercice précédent avec les $x_k = \dfrac{a_k}{G_n}$, ou avec les $x_k = \dfrac{G_n}{a_k}$.

Exercice 3

On utilisera ici les résultats de l'exercice 2.

1. Retrouver l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ pour tout $x \geqslant 0$.
2. Pour tous réels strictement positifs a, b, c, montrer que $\dfrac{2}{b+c} + \dfrac{2}{c+a} + \dfrac{2}{a+b} \geqslant \dfrac{9}{a+b+c}$.
3. Pour tout $n \geqslant 2$, prouver l'encadrement : $1 > \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} > \frac{2}{3}$.
4. Pour tout $n \geqslant 1$, prouver que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant n\Big(\sqrt[n]{n+1} - 1\Big)$

Exercice 4

On utilisera ici les résultats de l'exercice 2.

1. Montrer que pour $a > 0$ et $b \geqslant 0$, et tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $a(a+nb)^{n-1} \leqslant (a + (n-1)b)^n$.
2. Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite arithmétique à termes strictement positifs.

   Montrer la double inégalité : $\sqrt{x_1 x_n} \leqslant \Big(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{1/n} \leqslant \dfrac{x_1 + x_n}{2}$.

   (pour la première inégalité, on procédera par récurrence sur n et on se ramènera à la question 1).
3. En déduire, pour tout entier naturel n, l'encadrement : $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.
4. Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.
5. Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geqslant 2^n$.