# TD n°6 : not so easy trigonometry

## Exercice 1

On considère la fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\,\cos(2x)\,\cos(4x)$.

1. Avec `Python`, tracer la courbe représentative de $f$ sur $[0, 2\pi]$.
2. Résoudre l'équation $(E)$ : $f(x) = \dfrac{1}{8}$ sur $]0, \pi[$.

## Exercice 2

Prouver l'inégalité $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

## Exercice 3

Montrer que si $0 < x < \pi$, alors $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} > 0$.

Indication : si on est sur $]0, \pi[$ alors $\sin(x) > 0$, et penser « télescopage ».

## Exercice 4

Trouver le maximum de $\psi(x) = \sin^2 x \,\sin 2x$ sur $[0, \pi]$. En déduire $\left|\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} \sin 2^k x\right| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

## Exercice 5

Soient $x, y, z$ trois angles $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et vérifiant l'égalité : $\dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} + \dfrac{\sin(y-z)}{\sin(y+z)} + \dfrac{\sin(z-x)}{\sin(z+x)} = 0$.

Montrer que deux au moins parmi $x, y, z$ sont égaux.

Transformer $(E)$ en faisant apparaître des tangentes.

Poser ensuite $X = \tan x$, $Y = \tan x$, $Z = \tan z$ et terminer le calcul algébriquement.

## Exercice 6

En s'appuyant sur chacun des cotés d'un triangle $(T)$, et vers l'extérieur de celui-ci, on construit trois carrés numérotés 1, 2 et 3 (voir figure).

À partir des segments reliant des sommets de ces trois carrés, comme indiqué, on trace les carrés numérotés 4, 5 et 6.

On note $\mathcal{A}_k$ l'aire du carré n°$k$, pour $1 \leqslant k \leqslant 6$.

Montrer que $\mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_6 = 3(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3)$.