TD n°4 : calculs de sommes

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\,2^k$. On se propose de calculer S_n de plusieurs manières :

(a) Avec Python, calculer les S_n, pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.

(b) Aller sur http://oeis.org pour « intuiter » une formule, puis la prouver par récurrence.

(c) Former la somme $S_{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+1}$, et y reconnaître $2S_n$. Conclure.

(d) Penser que $k = \sum_{j=1}^{k} 1$, et terminer par une interversion de sommations.

(e) Si on pose $u_n = (n-2)2^n$, que vaut $u_{n+1} - u_n$? et donc ?

(f) Simplifier $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^k$ pour $x \neq 1$, calculer $f'(x)$ puis conclure.

Exercice 2

(a) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

- en utilisant le module `fractions` de `Python`, calculer S_n de façon exacte, pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
- en utilisant un papier et un crayon, calculer S_n pour $n \geqslant 1$ (deux méthodes).

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

(i) Première méthode : trouver a, b, c tels que : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$, et conclure.

(ii) Deuxième méthode : considérer $v_k = \frac{1}{k(k+1)}$, former $v_k - v_{k+1}$ et conclure.

(c) Soit m fixé dans $\mathbb{N}^*$. Calculer la somme $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}$ en fonction de n.

Exercice 3

On se donne un réel a de $]0,1[$ et pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$.

On se propose de montrer $u_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2(1-a^{n+1})}$ pour $n \geqslant 1$.

a) Vérifier soigneusement que la propriété est vraie si $1 \leqslant n \leqslant 3$. Conclure par récurrence sur n.

b) Autre méthode : considérer $(1-a)u_n$ et conclure par télescopage.

Exercice 4

On se donne les réels $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, avec $n \geqslant 1$ fixé.

On pose $A = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ et $D = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$.

(a) Montrer que $D = \frac{1}{2} \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) = nC - AB$.

(b) En déduire que :

- si les suites (a) et (b) sont de même monotonie, $AB \leqslant nC$.
- si elles sont de monotonies contraires, alors : $AB \geqslant nC$.