Problème

Première partie : sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

Pour tout a de $\mathbb{R}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ka,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Les ensembles $a\mathbb{Z}$ sont de manière évidente des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$.
Dans cette partie, on désigne par G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à $\{0\}$.
On va montrer que soit G est de la forme $a\mathbb{Z}$ (avec $a > 0$) soit G est une partie dense de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ est non vide. Justifier l'existence de $a = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+}$.
2. On suppose ici que a est strictement positif.
   (a) Montrer que a est élément de G (indication : raisonner par l'absurde, considérer l'intervalle $]a, 2a[$ et utiliser deux fois la caractérisation de la borne inférieure).
   (b) Montrer que G est inclus dans $a\mathbb{Z}$ (indication : pour tout x de G, justifier l'existence d'un k de $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant x - ka < a$). En déduire que $G = a\mathbb{Z}$ (G est dit *discret*).
3. Dans cette question, on suppose que a est nul.
   Montrer que pour tous réels x, y avec $x < y$, il existe z dans G tel que $x < z < y$.
   (Indication : utiliser, après avoir justifié son existence, un élément t de $G \cap]0, y-x[$).
   Une récurrence immédiate montre que $]x, y[$ contient une infinité d'éléments de G.
   On exprime cette situation en disant que G est dense *dans $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas bien sûr des ensembles $a\mathbb{Z}$. On a donc prouvé que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit discrets (parmi eux, le groupe trivial $\{0\} = 0\mathbb{Z}$ est le seul qui soit fini), soit denses dans $\mathbb{R}$.*

Deuxième partie : morphismes croissants d'un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$

Dans cette partie, G désigne un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
On se propose de caractériser les morphismes croissants de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$, c'est-à-dire les applications $f : G \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $(x \Rightarrow y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$.
Il est clair que pour tout réel λ, l'application $t \mapsto \lambda t$ est un morphisme de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$, croissant si $\lambda \geqslant 0$, décroissant si $\lambda \leqslant 0$.

1. On suppose dans cette question que G est un sous-groupe *discret* de $(\mathbb{R},+)$.
   Soit g un morphisme de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$.
   Montrer qu'il existe un réel λ tel que, pour tout t de G, $g(t) = \lambda t$.
   Les morphismes croissants de G dans $\mathbb{R}$ sont donc les applications $t \mapsto \lambda t$, où $\lambda \geqslant 0$.

Dans la suite de cette partie, G est un sous-groupe *dense* de $(\mathbb{R},+)$.
Soit g un morphisme croissant de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sup\{g(t),\ t \in G \cap]-\infty, x]\}$.

2. Justifier l'existence de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Montrer que f est croissante, et qu'elle est un prolongement de l'application g.
3. Dans cette question, on se donne un réel strictement positif ε.
   (a) Montrer qu'il existe x, y dans G tels que $x < y$ et $0 \leqslant g(y) - g(x) \leqslant \varepsilon$.
   Indication : utiliser la densité de G dans $[0, a]$, avec a donné dans $G \cap \mathbb{R}^{+*}$.
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $t \in G \cap [-\alpha, \alpha] \Rightarrow |g(t)| \leqslant \varepsilon$.
   (c) Prouver alors que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}, |y - x| \leqslant \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   Indication : si $x \leqslant y$ encadrer judicieusement $[x, y]$ par deux éléments de G.
4. (a) Montrer que f est un endomorphisme continu du groupe $(\mathbb{R},+)$.
   (b) En déduire $f(x) = xf(1)$ pour tout réel x (supposer $x \in \mathbb{Z}$, puis $x \in \mathbb{Q}$).
5. Déduire de ce qui précède les morphismes croissants de $(G,+)$ dans $(\mathbb{R},+)$.