Une structure algébrique

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi T vérifiant :

$$\forall\, a,b,c \in E,\qquad \begin{cases} a \,\mathrm{T}\, a = b \,\mathrm{T}\, b & (1)\\ (a \,\mathrm{T}\, c) \,\mathrm{T}\, (b \,\mathrm{T}\, c) = a \,\mathrm{T}\, b & (2)\\ a \,\mathrm{T}\, (a \,\mathrm{T}\, b) = b & (3)\end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, on notera, pour tout élément a de E : $a^2 = a \,\mathrm{T}\, a = e$.

On définit ensuite une loi $*$ en posant : $\forall\, a,b \in E,\ a * b = a \,\mathrm{T}\, (e \,\mathrm{T}\, b)$.

1. Montrer que e est neutre pour la loi $*$.
2. Montrer que pour tout a de E, $a' = e \,\mathrm{T}\, a$ est symétrique de a pour la loi $*$.
3. Montrer successivement que, pour tous a, b, c de E :
   (a) $(a \,\mathrm{T}\, b)' = b \,\mathrm{T}\, a$
   (b) $a \,\mathrm{T}\, (b \,\mathrm{T}\, c) = (a \,\mathrm{T}\, b) \,\mathrm{T}\, c'$
   (c) $(a \,\mathrm{T}\, b) \,\mathrm{T}\, c = a \,\mathrm{T}\, (b \,\mathrm{T}\, c')$
   (d) $(a \,\mathrm{T}\, b)' = a' \,\mathrm{T}\, b'$
   (e) $a * b = a \,\mathrm{T}\, b'$.
4. En déduire que la loi $*$ est associative et commutative. Conclusion ?
5. Montrer que dans $\mathbb{R}$ on définit ainsi l'addition à partir de la soustraction !
6. On remplace la condition (3) par (3′) : $(a \,\mathrm{T}\, (e \,\mathrm{T}\, b)) \,\mathrm{T}\, b = a$ (où e désigne toujours la valeur commune de tous les $x \,\mathrm{T}\, x$, pour x quelconque dans E.)
   (a) Montrer que $(E, *)$ est un groupe.
   (b) En choisissant pour E l'ensemble des permutations d'un ensemble X et en définissant la loi T par $f \,\mathrm{T}\, g = f \circ g^{-1}$, montrer que $(E, *)$ peut ne pas être abélien.
7. On remplace la condition (3) par $a \,\mathrm{T}\, b^2 = a$.
   (a) Montrer que $(E, *)$ est un groupe, non nécessairement abélien (exemple ?).
   (b) Si on remplace de plus (2) par $(a \,\mathrm{T}\, b) \,\mathrm{T}\, (a \,\mathrm{T}\, c) = c \,\mathrm{T}\, b$, montrer que $(E, *)$ est abélien.