

## Sous-groupes distingués

Soit  $G$  un groupe, qui n'est pas supposé abélien. On note  $(a, b) \mapsto ab$  la loi de  $G$ .

On note  $e$  le neutre de  $G$ , et  $a^{-1}$  le symétrique de tout élément  $a$  de  $G$ .

Pour toute partie  $X$  non vide de  $G$ , et pour tous éléments  $a, b$  de  $G$ , on pose :

$$aX = \{ax, x \in X\} \quad Xb = \{xb, x \in X\} \quad aXb = a(Xb) = (aX)b = \{axb, x \in X\}$$

Les propriétés suivantes sont évidentes et n'ont pas à être démontrées :

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} aX \subset aY \\ Xb \subset Yb \\ aXb \subset aYb \end{cases} \quad \begin{cases} a(bX) = (ab)X \\ (Xa)b = X(ab) \\ a(bXc)d = (ab)X(cd) \end{cases} \quad eX = Xe = X$$

On rappelle que les automorphismes intérieurs de  $G$  sont les applications  $\varphi_a$  définies par :

$$\forall a \in G, \forall x \in G, \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

### I. Définition des sous-groupes distingués

1. Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) Pour tout  $a$  de  $G$ ,  $aH \subset Ha$
- ii) Pour tout  $a$  de  $G$ ,  $Ha \subset aH$
- iii) Pour tout  $a$  de  $G$ ,  $aH = Ha$

On dit qu'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est *distingué* s'il vérifie ces conditions.

2. Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ .

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $H$  est distingué dans  $G$
- ii)  $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$
- iii)  $\forall a \in G, aHa^{-1} \subset H$

Exprimer cette propriété avec la terminologie des automorphismes intérieurs de  $G$ .

### II. Exemples de sous-groupes distingués

1. Soit  $G$  un groupe. Vérifier que  $\{e\}$  et  $G$  sont distingués dans  $G$ .

2. Que peut-on dire des sous-groupes distingués d'un groupe abélien  $G$  ?

3. Soient  $G$  et  $\tilde{G}$  deux groupes. Soit  $f : G \rightarrow \tilde{G}$  un morphisme de groupes.

(a) On suppose que  $\tilde{H}$  est un sous-groupe distingué de  $\tilde{G}$ .

Montrer que son image réciproque par  $f$  est un sous-groupe distingué  $H$  de  $G$ .

(b) Dans cette question, on suppose que le morphisme  $f$  est surjectif.

Soit  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ .

Montrer que  $\tilde{H} = f(H)$  est un sous-groupe distingué de  $\tilde{G}$ .

(c) Que dire du noyau de  $f$  ?

### III. Centre et centralisateurs

Soit  $G$  un groupe. Soit  $X$  une partie non vide quelconque de  $G$ .

On appelle *centralisateur* de  $X$  l'ensemble  $X' = \{a \in G, \forall x \in X, ax = xa\}$ .

On appelle *centre* de  $G$  l'ensemble  $C = \{a \in G, \forall x \in G, ax = xa\}$ .

Le centre de  $G$  est donc le centralisateur  $G'$  de  $G$  lui-même.

1. (a) Montrer que  $X'$  est un sous-groupe de  $G$ .  
(b) Montrer que le sous-groupe  $C$  est distingué dans  $G$ .
2. Avec les automorphismes intérieurs, retrouver que  $C$  est distingué dans  $G$ .
3. Dans cette question  $X$  et  $Y$  sont deux parties non vides quelconques de  $G$ .  
(a) Vérifier que  $X \subset Y \Rightarrow Y' \subset X'$ .  
(b) On pose  $X'' = (X')'$ . Montrer que  $X$  est inclus dans  $X''$ .  
(c) On pose  $X''' = ((X')')'$ . Montrer que  $X' = X'''$ .
4. Dans cette question, on suppose que  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .  
(a) Montrer les équivalences :  $H$  abélien  $\Leftrightarrow H \subset H' \Leftrightarrow H''$  abélien.  
(b) Montrer que si  $H$  est distingué, alors  $H'$  est distingué.

### IV. Produit de deux sous-groupes

Dans cette partie,  $H$  et  $K$  sont deux sous-groupes quelconques de  $G$ .

On pose  $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$  et  $KH = \{kh, k \in K, h \in H\}$ .

1. Montrer que  $HK \subset KH \Leftrightarrow KH \subset HK \Leftrightarrow HK = KH$ .
2. Montrer que  $HK$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $HK = KH$ .
3. On suppose que l'un des deux sous-groupes  $H$  ou  $K$  est distingué.  
Montrer que  $HK = KH$ . Conclusion ?

### V. Quotient par un sous-groupe distingué

Soit  $H$  un sous-groupe quelconque de  $G$ .

On définit sur  $G$  une relation  $\mathcal{R}$  par  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ .

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $G$ .  
Quelle est cette relation si  $H = G$ ? si  $H = \{e\}$  ?
2. Vérifier que la classe d'équivalence d'un élément  $a$  de  $G$  est  $\bar{a} = aH$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $H$  est un sous-groupe distingué de  $G$ .

On note  $G/H$  l'ensemble des classes d'équivalence de  $G$  pour la relation  $\mathcal{R}$ .

- (a) Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $G$ . Montrer que  $\overline{xy}$  ne dépend que de  $\bar{x}$  et de  $\bar{y}$ .
- (b) On peut donc définir une loi sur  $G/H$  en posant :  $\forall (x, y) \in G^2, \bar{x} \bar{y} = \overline{xy}$ .  
Montrer qu'alors  $G/H$  est un groupe. Quel est le neutre? l'inverse de  $\bar{x}$ ?  
On dit que  $G/H$  est le *groupe quotient* de  $G$  par le sous-groupe distingué  $H$ .
- (c) Montrer l'équivalence des deux propriétés :  
— Le groupe  $G/H$  est commutatif.  
— Pour tous  $x, y$  de  $G$ , l'élément  $y^{-1}x^{-1}yx$  est dans  $H$ .