Exercice 1

Soit G un groupe multiplicatif (le produit de a par b est simplement noté ab).

On ne suppose pas que le produit de G est commutatif.

Pour toute partie A de G, on note $\mathcal{C}(A) = \{x \in G,\ \forall a \in A,\ ax = xa\}$

1. Pour toute partie A de G, montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-groupe de G.
2. Soit X, Y deux parties de G telles que $X \subset Y$. Comparer $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(Y)$ pour l'inclusion.
3. Soit X une partie quelconque de G, comparer X et $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$ pour l'inclusion.
4. Pour toute partie A de G, montrer que : $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))) = \mathcal{C}(A)$

Exercice 2

Soit G un groupe multiplicatif (le produit de x par y est simplement noté ab).

On ne suppose pas que le produit est commutatif. On note e l'élément neutre.

On suppose qu'il existe a et b distincts dans G, différents de e, tels que : $ab = ba^{-1}$.

1. (a) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a : $a^j\, b = b\, a^{-j}$.
   (b) Montrer que pour tous j et k dans $\mathbb{Z}$, on a : $a^j\, b^k = b^k\, a^{(-1)^k j}$
2. Soit $H = \{a^j\, b^k, (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que H est le sous-groupe de G engendré par $\{a, b\}$ (c'est-à-dire le plus petit sous-groupe de G contenant $\{a, b\}$).
3. On suppose qu'il existe des entiers u et v dans $\mathbb{N}^*$ tels que : $a^u = e$ et $b^v = e$.

   On note alors : $n = \min\{u \in \mathbb{N}^*, a^u = e\}$ et $m = \min\{v \in \mathbb{N}^*, b^v = e\}$.

   On suppose en outre que les entiers m et n sont premiers entre eux.

   (a) Pour tous u, v dans $\mathbb{Z}$, montrer que : $\begin{cases} a^u = e \Leftrightarrow (u \text{ est un multiple de } n) \\ b^v = e \Leftrightarrow (v \text{ est un multiple de } m) \end{cases}$

   (b) Montrer que, pour tous j, k de $\mathbb{Z}$, on a : $a^j = b^k \Rightarrow (j \in n\mathbb{Z}$ et $k \in m\mathbb{Z})$

   (c) Montrer que $\varphi : (j,k) \mapsto a^j b^k$ est bijective de $\{0, \cdots, n-1\} \times \{0, \cdots, m-1\}$ sur H.

   Combien H contient-il d'éléments ?
4. Soit G le groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

   Les applications $z \mapsto \rho(z) = jz$ et $z \mapsto \sigma(z) = \bar{z}$ sont bien sûr des éléments de G.

   Déterminer le cardinal du sous-groupe H de G engendré par ρ et σ.

   Interpréter géométriquement chaque élément de H.

Exercice 3

Soit G un groupe cyclique d'ordre $n \geqslant 1$.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est lui-même un groupe cyclique.
2. Soit d un diviseur de n. Montrer que G possède exactement un sous-groupe d'ordre d.