Polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives

Partie I : Polynômes trigonométriques.

On dit qu'une application f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un *polynôme trigonométrique* s'il existe une famille $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, les c_k étant tous nuls sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, telle que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{ikx}$.

Dans cette partie, on suppose que $f : x \mapsto \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{ikx}$ un polynôme trigonométrique.

1. Pour tout p de $\mathbb{Z}$, calculer $I_p = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ipx}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire que pour tout entier relatif m, on a l'égalité : $c_m = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $g : x \mapsto \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_k\,\mathrm{e}^{ikx}$ un polynôme trigonométrique.

   Montrer qu'on a l'égalité $g = f$ si et seulement si, pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a $d_k = c_k$.
4. On suppose que f n'est pas l'application nulle. Prouver le résultat suivant :

   Il existe un unique couple (p, A) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-ipx}A(e^{ix}) \\ A(0) \neq 0 \end{cases}$
5. Vérifier que les applications $x \mapsto \cos^5 x$ et $x \mapsto \sin^5 x$ sont des polynômes trigonométriques.

   Écrire ces applications sous la forme indiquée dans la question précédente.

Partie II : Polynômes trigonométriques à valeurs réelles.

Dans cette partie, $f : x \mapsto \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{ikx}$ est un polynôme trigonométrique *à valeurs réelles*.

On suppose $f \neq 0$, et on désigne toujours par (p, A) le couple défini dans la question I-4.

1. Montrer que pour tout entier relatif k, on a l'égalité : $c_{-k} = \overline{c_k}$.
2. En déduire $p \geqslant 0$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{k=-p}^{p} c_k\,\mathrm{e}^{ikx}$. Prouver que A est de degré $2p$.

   Si on pose $A = \sum\limits_{n=0}^{2p} \alpha_n X^n$, montrer que $\forall n \in \{0,\ldots,2p\},\ \alpha_{2p-n} = \overline{\alpha_n}$.
3. Montrer qu'il existe une famille unique $(a_0, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ de $2p+1$ réels telle que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{p} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

   On vérifiera que $a_0 = c_0$ et $\forall k \in \{1,\ldots,p\},\ a_k = 2\,\mathrm{Re}\,c_k$ et $b_k = -2\,\mathrm{Im}\,c_k$.
4. En utilisant la question II-2, Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}^*$, on a $A(z) = z^{2p}\,\overline{A(1/\overline{z})}$.
5. Soit $u = \mathrm{e}^{i\theta}$ une racine de module 1 de A, de multiplicité m.

   Montrer qu'on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\sin\dfrac{x-\theta}{2}\right)^m g(x)$, avec $g(\theta) \neq 0$.

   Montrer que si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors l'entier m est pair.
6. Soit v une racine de A, avec la multiplicité $m \geqslant 1$, et telle que $|v| \neq 1$.

   Montrer que $v \neq 0$ et que $v' = 1/\overline{v}$ est racine de A avec la même multiplicité.

   Indication : écrire $A = (X-v)^m \sum\limits_{k=0}^{2p-m} d_k\,X^k$ et utiliser la question II-4

Partie III : Polynômes trigonométriques à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $f : x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{ikx}$ un polynôme trigonométrique non nul, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On pourra utiliser les résultats des parties I et II.

En particulier il existe p dans $\mathbb{N}$, et A dans $\mathbb{C}[X]$ (avec $\deg A = 2p$) tels que :

— Pour tout réel x, $f(x) = \sum_{k=-p}^{p} c_k \,\mathrm{e}^{ikx} = \mathrm{e}^{-ipx} A(\mathrm{e}^{ix})$.

— Le coefficient c_p est non nul et pour tout k de $\{-p,\ldots,p\}$, $c_{-k} = \overline{c_k}$

1. En utilisant II-5 et II-6, montrer que A peut s'écrire $A = \lambda BC$ où :
   — Le facteur λ est une constante complexe non nulle.
   — Le polynôme B s'écrit sous la forme $B = \prod_{k=1}^{r} (X - \mathrm{e}^{i\theta_k})^{2m_k}$, où :
     - ◇ Les réels θ_k sont distincts deux à deux modulo 2π.
     - ◇ Les m_k sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
     - ◇ L'entier r est positif ou nul. Si $r = 0$, on convient que $B = 1$.

   — Le polynôme C s'écrit sous la forme $C = \prod_{k=1}^{s} \big((X - v_k)(X - 1/\overline{v_k})\big)^{n_k}$, où :
     - ◇ Les v_k sont des complexes de module < 1, distincts deux à deux.
     - ◇ Les n_k sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
     - ◇ L'entier s est positif ou nul. Si $s = 0$, on convient que $C = 1$.

   On vérifiera que $\sum_{k=1}^{r} m_k + \sum_{k=1}^{s} n_k = p$.

2. Soit x un réel, et soit z un nombre complexe non nul.
   Établir l'égalité $|(\mathrm{e}^{ix} - z)(\mathrm{e}^{ix} - 1/\overline{z})| = |\mathrm{e}^{ix} - z|^2 / |z|$.

3. En déduire l'existence d'un polynôme Q de degré p tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |Q(\mathrm{e}^{ix})|^2$.
   On pourra noter que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = |f(x)|$.

4. On suppose que f est non constante. Cela implique donc $p \geqslant 1$.
   L'application f étant continue, elle est bornée sur tout segment (admis ici.)
   On note $M = \sup\{f(x), x \in [0, 2\pi]\}$ (f étant 2π-périodique, on a $M = \sup f$ sur $\mathbb{R}$.)
   On note $Q = \sum_{k=0}^{p} \beta_k X^k$ le polynôme défini à la question précédente.
   (a) En identifiant, prouver $c_0 = \sum_{k=0}^{p} |\beta_k|^2$ et $c_p = 2\,\overline{\beta_0}\,\beta_p$. En déduire $c_0 \geqslant 2\,|c_p|$.
   (b) En considérant l'application $g : x \mapsto M - f(x)$, prouver $M \geqslant 4\,|c_p|$.
   (c) Montrer que $M = 4\,|c_p| \Leftrightarrow |\beta_0| = |\beta_p|$ et $\forall k \in \{1,\ldots,p-1\},\ \beta_k = 0$

Partie IV : Une propriété de minimum.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on pose $M(P) = \sup\limits_{[-1,1]} |P(x)|$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui sont unitaires de degré n.

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout P de $\mathcal{U}_n$ on a $M(P) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ et de déterminer l'unique polynôme de $\mathcal{U}_n$ pour lequel on a l'égalité.

On définit une suite (Q_n) de polynômes par $\begin{cases} Q_0 = 2,\ Q_1 = X \\ \forall n \geqslant 1,\ Q_{n+1} = XQ_n - \frac{1}{4}Q_{n-1} \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, Q_n est un élément de $\mathcal{U}_n$, à coefficients réels.

   (b) Prouver que pour tout réel t, et tout $n \geqslant 1$, on a : $\cos nt = 2^{n-1}Q_n(\cos t)$.

   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, vérifier que $M(Q_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

2. Dans la suite de cette partie, on fixe $n \geqslant 1$. Pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, on note $x_k = \cos \dfrac{k\pi}{n}$.
   On a bien entendu les inégalités $x_0 = 1 > x_1 > \cdots > x_k > \cdots > x_{n-1} > x_n = -1$.

   (a) Calculer la valeur de Q_n en chacun des points x_k.

   (b) On se donne un polynôme P de $\mathcal{U}_n$, à coefficients réels. Montrer que $M(P) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
   Indication : raisonner par l'absurde et considérer le polynôme $R = Q_n - P$.
   On montrera que $R(x_k)$ a le signe de $(-1)^k$.

   (c) On se donne un polynôme P de $\mathcal{U}_n$, à coefficients réels ou complexes.
   Montrer que $M(P) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Indication : considérer le polynôme R dont les coefficients sont les parties réelles des coefficients de P.

3. On se donne un polynôme A de $\mathcal{U}_n$ tel que $M(A) = \frac{1}{2^{n-1}}$.
   L'objectif de cette question est de montrer que $A = Q_n$.

   (a) Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ Q(z) = 2^n z^n A\Big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\Big)$.
   Préciser le degré de Q, son coefficient dominant et son coefficient constant.

   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(\mathrm{e}^{ix}) = 2^n\,\mathrm{e}^{inx}A(\cos x)$, puis $\sup\limits_{[0,2\pi]} |Q(\mathrm{e}^{ix})| = 2$.

   (c) En utilisant III-4, prouver que $Q = X^{2n} + 1$.

   (d) Montrer alors que $A = Q_n$. Conclusion ?