Podaires d'une parabole

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure canonique de plan euclidien orienté.

On note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2x$, et F le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ (le *foyer* de $\mathcal{P}$.)

Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ s'écrit $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, avec $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Première partie

On oriente la parabole $\mathcal{P}$ dans le sens des t croissants (donc dans le sens des ordonnées croissantes.)

On fixe l'origine des abscisses curvilignes en O (donc au sommet de la parabole.)

1. Calculer l'abscisse curviligne s du point $M(t)$.
   Préciser la base de Frenet au point $M(s)$.
2. Calculer le rayon de courbure R au point $M(s)$.
   Soit $\Omega(t)$ le centre de courbure de $\mathcal{P}$ en $M(t)$.
   Montrer que les coordonnées de $\Omega(t)$ sont données par $\begin{cases} x_\Omega(t) = 1 + \frac{3}{2}\,t^2 \\ y_\Omega(t) = -t^3 \end{cases}$
3. On note $\mathcal{Q}$ la courbe décrite par $\Omega(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$ (c'est la *développée* de $\mathcal{P}$.)
   Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{Q}$ est : $y^2 = \frac{8}{27}\,(x-1)^3$.
   Vérifier que toute normale à $\mathcal{P}$ est une tangente à $\mathcal{Q}$.
   Représenter conjointement les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on désigne par $A(a, b)$ un point fixé du plan.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 \geqslant 2x$ est appelé *extérieur* de $\mathcal{P}$.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 > 2x$ est l'*extérieur strict* de $\mathcal{P}$.

On définit aussi l'intérieur ($y^2 \leqslant 2x$) et l'intérieur strict ($y^2 < 2x$) de $\mathcal{P}$.

1. Écrire l'équation de la tangente $\mathcal{D}(t)$ au point $M(t)$ de $\mathcal{P}$.
2. Soit $H(t)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$.
   Montrer que les coordonnées de $H(t)$ sont données par :
   $$X(t) = \frac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(t^2+1)} \qquad \text{et} \qquad Y(t) = \frac{t^3 + 2at + 2b}{2(t^2+1)}$$
   Quand t décrit $\mathbb{R}$, le point $H(t)$ décrit une courbe notée Γ_A ou $\Gamma(a, b)$.
   On dit que Γ_A est la *podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à A*.
3. Montrer que la courbe Γ est toute entière incluse dans l'extérieur de $\mathcal{P}$.
4. Montrer que $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, -b)$ se déduisent l'une de l'autre par une symétrie.
   Que peut-on dire, en particulier, des courbes $\Gamma(a, 0)$?
5. Décrire Γ_A quand $A = F(\frac{1}{2}, 0)$. On fera une figure illustrant cette situation.

Troisième partie

On garde les notations des parties I et II.

On va procéder à des études locales des podaires de la parabole $\mathcal{P}$. Dans cette partie, plusieurs questions ont des réponses géométriques simples, que l'on préférera bien sûr à des débauches de calculs.

1. Préciser le placement de Γ_A par rapport à sa branche infinie et illustrer les différents cas (on pourra se limiter à $b \geqslant 0$, avec $A \neq F$.)
2. (a) Montrer que A appartient à Γ_A si et seulement si A est extérieur à $\mathcal{P}$.

   (b) Montrer que si Γ_A présente un point double B, alors nécessairement $B = A$.

   (c) Inversement montrer que A est point double de $\Gamma_A \Leftrightarrow A$ est strictement extérieur à $\mathcal{P}$.
3. (a) On suppose que $A(a, b)$ est strictement extérieur à $\mathcal{P}$. Montrer que les deux tangentes à Γ_A au point A sont respectivement orthogonales aux deux tangentes à $\mathcal{P}$ menées par A.

   (b) Si $A(a, b)$ est sur $\mathcal{P}$, Montrer que la tangente en A à Γ_A est la normale en A à $\mathcal{P}$.
4. Dans cette question, on va utiliser le paramétrage de $\mathcal{P}$ par une abscisse curviligne s, comme on l'a vu dans la partie I. Le point $M(t)$ sera aussi noté $M(s)$ en référence à ce paramétrage.
   On notera $R(s)$ le rayon de courbure à la parabole $\mathcal{P}$ au point $M(s)$.

   On notera aussi $\mathcal{D}(s)$ la tangente à $\mathcal{P}$ en $M(s)$, et $H(s)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(s)$.
   L'abscisse curviligne s de $\mathcal{P}$ définit donc aussi une représentation paramétrique de la podaire Γ_A (mais attention : ce n'est pas une abscisse curviligne sur Γ_A.)

   (a) Pour tout s, justifier l'égalité $H(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T}(s)$, avec $\lambda(s) = (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))$.

   (b) On désigne par $\overrightarrow{H'(s)}$ le vecteur dérivé, par rapport à s, de la position du point $H(s)$.
   Montrer que $\overrightarrow{H'(s)} = \dfrac{1}{R(s)} \left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s))\ \overrightarrow{T}(s) + (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))\ \overrightarrow{N}(s)\right]$

   (c) Prouver que si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, alors la courbe Γ_A est sans point stationnaire.

   (d) Prouver que si A appartient à $\mathcal{P}$, alors A est le seul point stationnaire de Γ_A.
5. Dans cette question, on suppose que le point $A(a, b)$ est quelconque.

   Pour tout réel m, soit Δ_m la droite passant par A, de coefficient directeur m.

   (a) Montrer que Δ_m est normale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $m^3 + 2(1 - a)m + 2b = 0$.
   Il est donc clair que par A passent au moins une et au plus trois normales distinctes à $\mathcal{P}$.

   (b) Discuter le nombre n_A de normales à $\mathcal{P}$ qui passent par $A(a, b)$.
   On montrera en particulier que $n_A = 3 \Leftrightarrow a > 1$ et $|b| < (\frac{2}{3}(a - 1))^{3/2}$.
   Faire une figure représentant les trois normales issues de $A(15/2, 6)$.

   (c) Soit $M(t_0)$ le pied sur $\mathcal{P}$ de l'une quelconque des normales à $\mathcal{P}$ passant par A, avec $M(t_0) \neq A$.
   Montrer que $M(t_0)$ est un point de Γ_A et préciser la tangente en Γ en ce point.
   Indication : utiliser les notations de la question III.4.

   On illustrera rapidement deux cas de figure avec un point A à partir duquel on peut mener trois normales à $\mathcal{P}$ (A étant successivement intérieur puis extérieur à $\mathcal{P}$.)

Quatrième partie

Cette partie est consacrée à l'étude des points d'inflexion éventuels de la courbe Γ_A.
Pour cela, on reprend les notations de la question III4, et en particulier les résultats de III4a et III4b.

1. En dérivant par rapport à s l'égalité obtenue dans III4b, prouver que :
   $R'(s)\overrightarrow{H'(s)} + R(s)\overrightarrow{H''(s)} = \dfrac{2}{R(s)}\left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s))\,\overrightarrow{N}(s) - (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))\,\overrightarrow{T}(s)\right] - \overrightarrow{N}(s)$
2. Par un calcul dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$, en déduire :
   $R^3(s)\det(\overrightarrow{H'(s)}, \overrightarrow{H''(s)}) = 2\|\overrightarrow{AM(s)}\|^2 + (\overrightarrow{AM(s)} \mid R(s)\overrightarrow{N}(s))$
3. On définit le polynôme $P_A(t) = bt^3 + \frac{3}{2}(1-2a)t^2 - 3bt + 2a^2 + 2b^2 - a$.
   Montrer que $H(t_0)$ est un point d'inflexion de Γ_A si P_A s'annule en changeant de signe en t_0.
4. Dans cette question uniquement, on suppose $b = 0$.
   Discuter suivant a le nombre de points d'inflexion sur Γ_A.
5. Dans cette question, on suppose $b \neq 0$.
   (a) Vérifier que la dérivée P'_A de P_A s'annule en deux points distincts t_1 et t_2.
   (b) Effectuer la division euclidienne de P_A par P'_A.
   (c) En déduire qu'on a l'égalité $P_A(t_1)P_A(t_2) = 4\,\|\overrightarrow{AF}\|^4\left(1 - \dfrac{2a}{b^2}\right)$.
   (d) Discuter le nombre d'inflexions de Γ_A suivant la position de A par rapport à $\mathcal{P}$.
6. On se propose de trouver les points d'inflexion par une autre méthode.
   Pour cela on va trouver une caractérisation pour que trois points de Γ_A soient alignés.
   (a) On se donne trois points $H(t_1)$, $H(t_2)$, $H(t_3)$ de Γ_A, de paramètres t_1, t_2, t_3 distincts.
   On note $\begin{cases} \sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3 \\ \sigma_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 \\ \sigma_3 = t_1t_2t_3 \end{cases}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} X(t_1) & X(t_2) & X(t_3) \\ Y(t_1) & Y(t_2) & Y(t_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
   Montrer que $H(t_1), H(t_2), H(t_3)$ sont alignés $\Leftrightarrow 2b(\sigma_1 - \sigma_3) + (2a-1)\sigma_2 = 4a^2 + 4b^2 - 2a$.
   (b) On admet qu'une droite $\mathcal{D}$ du plan est une tangente d'inflexion de la courbe Γ_A si l'équation aux points d'intersection de cette droite avec Γ_A admet une racine triple.
   Avec cette idée, retrouver la condition pour que $H(t)$ soit un point d'inflexion sur Γ_A.

Cinquième partie

Dans cette partie, on étudie et on trace quelques courbes Γ_A. Dans chaque cas, on précisera l'asymptote, et le cas échéant les points doubles, les points stationnaires et les points d'inflexion.

1. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (-5/2, 0)$.
2. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (0, 0)$.
3. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 0)$.
4. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 2)$.
5. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 4)$.
6. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 6)$.