Quelques pépites extraites du nombre d'or.

— On pose $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le *nombre d'or*) et $\widehat{\Phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On observera que Φ et $\widehat{\Phi}$ sont les solutions de $x^2 = x+1$, et que $\widehat{\Phi} = -\dfrac{1}{\Phi}$.

— Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x.

Première partie

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$ (où 1 apparaît n fois).

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et que sa limite est égale à Φ.

2. On pose $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ pour $n \geqslant 1$.

   En s'aidant de la suite de terme général $w_n = \dfrac{v_n - \Phi}{v_n - \widehat{\Phi}}$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \Phi$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie les relations entre le nombre d'or et la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$.

On rappelle que celle-ci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Dans cette question, on établit une expression de F_n en fonction Φ^n et de $\widehat{\Phi}^n$.
   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n)$.
   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, F_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$.

2. En utilisant Φ, on trouve ici des relations de récurrence d'ordre 1 entre les F_n.
   (a) Montrer que pour n de $\mathbb{N}$, on a $F_{n+1} = \Phi F_n + \widehat{\Phi}^n$.
   (b) Inversement, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on $\Phi^{n+1} = \Phi F_{n+1} + F_n$.
   (c) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, $F_{2n} = [\,\Phi\, F_{2n-1}\,]$ et $F_{2n+1} = [\,\Phi\, F_{2n}\,] + 1$.
   (d) Déduire de $(2a)$ que $F_{n+1} = [\,\Phi F_n - \widehat{\Phi}\,]$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (e) Montrer que la suite de terme général $u_n = F_n + 1$ vérifie : $\forall\, n \geqslant 2,\ u_{n+1} = [\,\Phi u_n]$.

3. Dans cette question, on pose $q_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers Φ.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, prouver qu'on a l'égalité $q_{n+1} - q_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$.
   (c) Établir que les suites $(q_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(q_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
   (d) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$.
   (e) En revenant aux notations de (I.2), montrer que $q_n = v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Troisième partie

Pour tout réel $x > 1$, on note $E_1(x) = \{[\,nx\,], n \in \mathbb{N}^*\}$ et $E_2(x) = \{[\,nx^2\,], n \in \mathbb{N}^*\}$.

On remarque que $E_1(x)$ et $E_2(x)$ sont deux parties de $\mathbb{N}^*$. Plus précisément l'hypothèse $x > 1$ implique que $([\,nx\,])_{n\geqslant 1}$ et $([\,nx^2\,])_{n\geqslant 1}$ sont deux suites strictement croissantes de $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question, on va montrer que $E_1(\Phi)$ et $E_2(\Phi)$ sont deux ensembles disjoints.
   Par l'absurde, on suppose qu'il existe m, n dans $\mathbb{N}^*$ tels que $[\,m\Phi\,] = [\,n\Phi^2\,]$.
   (a) On pose $p = [\,m\Phi\,] = [\,n\Phi^2\,]$. Montrer que $p = [\,n\Phi\,] + n$.
   (b) Montrer que l'entier m est égal à $[\,n\Phi\,]$ ou bien à $[\,n\Phi\,] + 1$.
   (c) On suppose $m = [\,n\Phi\,]$. Montrer $m < (p - m)\Phi$. En déduire une contradiction.
   (d) On suppose $m = [\,n\Phi\,] + 1$. Montrer que $m > (p - m + 1)\Phi$.
   En déduire une contradiction et conclure.

2. Dans cette question, on va prouver que la réunion de $E_1(\Phi)$ et de $E_2(\Phi)$ est égale à $\mathbb{N}^*$.
   Il en résultera que les ensembles $E_1(\Phi)$ et de $E_2(\Phi)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout $m \geqslant 2$, on note $J_m = \{1, 2, 3, 4, \ldots, F_m\}$ et $\begin{cases} E_1^m(\Phi) = \{[\,k\,\Phi\,], k \in J_{2m-1}\} \\ E_2^m(\Phi) = \{[\,k\,\Phi^2\,], k \in J_{2m-2}\} \end{cases}$
   (a) Préciser le cardinal de $E_1^m(\Phi)$ et de $E_2^m(\Phi)$.
   (b) En utilisant (II 2 c) montrer que $E_1^m(\Phi)$ et $E_2^m(\Phi)$ sont des parties de J_{2m}.
   (c) Montrer finalement que $E_1^m(\Phi)$ et $E_2^m(\Phi)$ forment une partition de J_{2m}.
   (d) Conclure.

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe deux réels a, b, avec $1 < a < b$, tels que :
   — $E_1(a)$ et $E_2(a)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   — $E_1(b)$ et $E_2(b)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   On va constater que cette hypothèse conduit à une contradiction. Il en résultera que Φ est le seul réel $x > 1$ tel que $E_1(x)$ et $E_2(x)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $[\,na\,] \leqslant [\,nb\,]$ et $[\,na^2\,] \leqslant [\,nb^2\,]$
   (b) Justifier l'existence d'un entier $p \geqslant 1$ minimum pour lequel $[\,pa\,] < [\,pb\,]$.
   Justifier l'existence d'un entier $q \geqslant 1$ minimum pour lequel $[\,qa^2\,] < [\,qb^2\,]$.
   (c) On suppose qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $[\,pa\,] = [\,nb\,]$.
   Montrer que $n < p$ puis en déduire une contradiction.
   En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $[\,pa\,] = [\,rb^2\,]$.
   (d) Avec les notations précédentes, montrer $r \geqslant q$ et en déduire $[\,pa\,] > [\,qa^2\,]$.
   (e) En s'inspirant des deux questions précédentes, montrer $\exists\, s \in \mathbb{N}^*,\ [\,qa^2\,] = [\,sb\,]$.
   Prouver que $s \geqslant p$ et en déduire $[\,qa^2\,] > [\,pa\,]$.
   (f) Conclure cette partie du problème.
   A titre d'exemple, répartir les entiers de 1 à 30 entre $E_1(\Phi)$ et $E_2(\Phi)$.

Quatrième partie : le jeu de Whytoff

On rappelle que les ensembles $\begin{cases} E_1(\Phi) = \{\,[\,n\Phi\,],\, n \in \mathbb{N}^*\} \\ E_2(\Phi) = \{\,[\,n\Phi^2\,],\, n \in \mathbb{N}^*\} \end{cases}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Pour simplifier les notations, on pourra poser $a_n = [\,n\Phi\,]$ et $b_n = [\,n\Phi^2\,]$ pour $n \geqslant 1$.

On rappelle que l'égalité $\Phi^2 = \Phi + 1$ implique $b_n = [\,n(\Phi+1)\,] = [\,n\Phi\,] + n = a_n + n$.

Le jeu décrit ici était connu en Chine sous le nom de tsyan-shidzi (*le choix des pierres*). Il a été réinventé par le mathématicien néerlandais Willem Abraham Wythoff (1865-1939) qui en publia une analyse complète en 1907.

Deux joueurs font face à deux piles de pièces de hauteurs inégales. A son tour, chaque joueur retire un nombre quelconque de pièces (au moins une). Il peut choisir de retirer ces pièces dans une seule colonne ou dans les deux. Mais dans ce dernier cas, il doit retirer le même nombre de pièces dans les deux colonnes.

Le joueur qui retire la dernière pièce gagne la partie (on comprend pourquoi les deux colonnes doivent au départ être de hauteurs inégales !)

On dira que les deux piles sont *configurées* si elles contiennent respectivement a_n pièces (pour la pile la moins haute) et b_n pièces (pour la pile la plus haute.) pour un certain entier $n \geqslant 1$. On étend cette définition en posant $a_0 = b_0 = 0$ (dans ce cas les deux piles sont vides : le joueur qui atteint cette configuation a donc gagné.)

1. Dans cette question suppose que les colonnes sont configurées (et non vides.)
   Montrer qu'au tour suivant elles ne sont plus configurées.
2. Dans cette question on suppose que les colonnes ne sont pas configurées.
   Montrer qu'on peut jouer de telle sorte qu'au tour suivant elles le soient.
3. Déduire de ces résultats une stratégie pour ce jeu. Cette stratégie sera gagnante pour le premier ou pour le second joueur, selon l'état initial des deux piles de pièces.
4. Au départ, les piles contiennent 17 et 28 pièces. Grand prince, votre adversaire vous donne le choix : soit vous commencez, soit il commence. Que faites-vous ?
5. Le jeu suivant a été inventé vers 1960 par Rufus P.Isaacs, un mathématicien de l'université Johns Hopkins (Baltimore, Maryland.)
   Ce jeu pourrait s'appeler « *coince la reine dans un coin* ».

   Deux joueurs déplacent à tour de rôle une reine sur un échiquier (virtuellement infini vers la droite et vers le haut) à partir d'une position initiale.

   La reine ne peut se déplacer que vers le bas, vers la gauche, ou en diagonale dans la direction *sud-ouest*.

   Chaque joueur déplace à son tour la reine, d'au moins une case, et dans l'une des trois directions possibles.

   Est déclaré vainqueur le joueur qui amène la reine sur la case située en bas et à gauche de l'échiquier.

   Ci-contre, voici une situation initiale.

   Vous avez le choix de commencer à jouer ou de laisser jouer votre adversaire en premier. Que faites-vous ?