Pavages et clans

Rappels

Soit E un ensemble, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de E.

On rappelle que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E, \exists\, i \in I, x \in A_i\}$ et que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E, \forall\, i \in I, x \in A_i\}$.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de parties de E.

- On dit que cette suite est *croissante* si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit qu'elle est *décroissante* si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$.

Première Partie

Soit E un ensemble quelconque. Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que $\mathcal{P}$ est un *pavage* si : $\forall\,(A, B) \in \mathcal{P}^2, \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$

On dit que le pavage $\mathcal{P}$ est *achevé* si :

- Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ croissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{P}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages achevés de E.
2. Donner tous les pavages de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$.
3. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble fini.
   Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante (ou décroissante) de parties de E.
   (a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est *stationnaire*.
   Autrement dit, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geqslant p,\ A_n = A_p$.
   (b) En déduire que tout pavage de E est achevé.
4. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux pavages de E.
   (a) L'union $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ?
   (b) L'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ?
5. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E.
   (a) Montrer que la famille des pavages achevés de E qui contiennent $\mathcal{P}$ est non vide.
   On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'intersection de tous les pavages de cette famille.
   (b) Montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est lui-même un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.
   (c) Réciproquement, montrer que si un pavage achevé contient $\mathcal{P}$, alors il contient $\widehat{\mathcal{P}}$.
   $\widehat{\mathcal{P}}$ est donc, au sens de l'inclusion, le plus petit pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.
   On dit que $\widehat{\mathcal{P}}$ est le pavage achevé *engendré* par $\mathcal{P}$.
   (d) A quelle condition a-t-on $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$?

6. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E. On note $\mathcal{P}_m = \{B \subset E, \forall\, A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E qui contient $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est achevé, alors $\mathcal{P}_m$ est achevé.

Deuxième Partie

Rappel : on note $\overline{F}$ le complémentaire dans E d'une partie F quelconque de E.

On dit qu'un pavage $\mathcal{P}$ de E est un *clan* si : $\forall\,(A,B) \in \mathcal{P}^2, A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des clans de E.
2. Donner tous les clans de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$.
3. Montrer que si $\mathcal{P}$ est un clan de E alors $\mathcal{P}_m$ est un clan de E.
4. On se donne un clan $\mathcal{P}$ de E. On veut montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan de E.
   (a) Soit A une partie de E. On note $\mathcal{E}_A = \{B \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
   Montrer que est $\mathcal{E}_A$ est un pavage de E.
   (b) Prouver que le pavage $\mathcal{E}_A$ est achevé.
   (c) En déduire que si A appartient à $\mathcal{P}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{E}_A$.
   (d) Soit B une partie de E. On note $\mathcal{F}_B = \{A \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
   Montrer que est $\mathcal{F}_B$ est un pavage achevé de E.
   (e) En déduire que si B appartient à $\widehat{\mathcal{P}}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{F}_B$.
   (f) Conclure.