# Les nombres de Catalan

On rappelle que si $0 \leqslant p \leqslant n$, le symbole $\binom{n}{p}$ désigne le nombre de parties à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments. Par convention on pose $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ est appelé *nombre de Catalan* d'indice $n$.

## I. Généralités sur les nombres de Catalan

1. (a) Montrer que pour entier naturel $n$, on a l'égalité $C_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} C_n$.

   (b) Donner les valeurs de $C_n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 7$.

2. Prouver les relations suivantes :

   (a) $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$.

   (b) $C_n = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n} = \dfrac{2}{n-1}\dbinom{2n-1}{n+1} = \dbinom{2n-1}{n} - \dbinom{2n-1}{n+1}$.

   (c) Montrer que les $C_n$ sont dans $\mathbb{N}$, que la suite $(C_n)$ est strictement croissante à partir de $n = 1$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = +\infty$.

3. Dans cette question, on trouve l'ordre de grandeur de $C_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

   (a) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a : $4\Big(\dfrac{k-1}{k}\Big)^{3/2} \leqslant \dfrac{C_k}{C_{k-1}} \leqslant 4\Big(\dfrac{k}{k+1}\Big)^{3/2}$.

   (b) En déduire $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leqslant C_n \leqslant 3\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$.

## II. Un premier problème de dénombrement

On va étudier un problème de dénombrement où interviennent les nombres de Catalan.

On considère des *chemins* joignant des points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et formés de *déplacements* successifs.

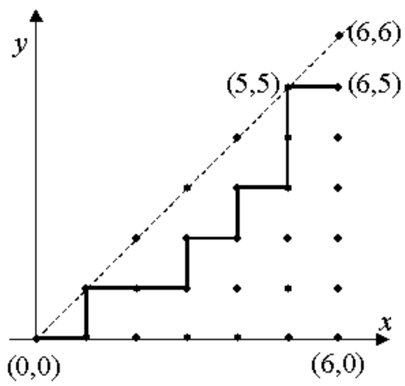
Les seuls déplacements autorisés à partir d'un point $(n, m)$ sont :

— Le passage de $(n, m)$ à $(n + 1, m)$ (vers la droite.)

— Le passage de $(n, m)$ à $(n, m + 1)$ (vers le haut.)

On note $\Delta = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant m \leqslant n\}$ l'ensemble des points de $\mathbb{N}^2$ qui sont "sous" ou "sur" la diagonale $y = x$.

Voici par exemple un chemin de $\Delta$, qui va de $(0, 0)$ à $(6, 5)$.




Remarque : pour tous entiers naturels $a$ et $b$, et moyennant une translation de vecteur $(a, b)$, il est évident qu'il y a autant de chemins d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité $(n, m)$ qu'il y a de chemins d'origine $(a, b)$ et d'extrémité $(a + n, b + m)$.

Pour tout $(n, m)$ de $\Delta$, on note $\delta_{n,m}$ le nombre de chemins d'origine $(0, 0)$, d'extrémité $(n, m)$, et qui sont inclus dans $\Delta$ (donc qui ne “traversent” pas la diagonale.)

On note $\delta_n = \delta_{n,n}$ c'est-à-dire le nombre de chemins de $\Delta$ qui vont de $(0, 0)$ à $(n, n)$.

1. (a) Indiquer rapidement la valeur des coefficients $\delta_{n,0}$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

   (b) Justifier $\delta_n = \delta_{n,n-1}$ (si $n \geqslant 1$) et $\delta_{n,m} = \delta_{n-1,m} + \delta_{n,m-1}$ (si $1 \leqslant m < n$.)

   (c) En déduire la valeur des $\delta_{n,1}$ (pour $n \geqslant 1$) et des $\delta_{n,2}$ (pour $n \geqslant 2$.)

   (d) Former le tableau triangulaire des $\delta_{n,m}$ pour $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant 7$.
   Que remarque-t-on pour les valeurs diagonales $\delta_n$, avec $0 \leqslant n \leqslant 7$ ?

2. (a) Montrer que pour tout couple $(n, m)$ de $\Delta$, on a $\delta_{n,m} = \dfrac{n - m + 1}{n + 1}\dbinom{n + m}{n}$.

   Indication : Procéder par récurrence sur l'entier $n$ ; pour chaque valeur de $n$ on sera amené à vérifier l'égalité précédente pour $m = 1$, $m = 2$, etc., $m = n$.

   (b) En déduire que le nombre de Catalan $C_n$ est égal au nombre $\delta_n$ de chemins de $\Delta$ qui ont le point $(0, 0)$ pour origine et le point $(n, n)$ pour extrémité.

3. On se propose de retrouver le résultat de (II.2$b$) de façon purement combinatoire.

   (a) Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels.
   Montrer que le nombre de chemins de $A(a, b)$ à $B(a+n, b+m)$ est $\dbinom{n+m}{m}$.

   (b) Un chemin $\mathcal{P}$ de $(0, 0)$ à $(n, n)$ est dit *excessif* s'il franchit $y = x$.
   Soit $\mathcal{E}_n$ le nombre de chemins excessifs de $(0, 0)$ à $(n, n)$. Prouver $\delta_n = \dbinom{2n}{n} - \mathcal{E}_n$

   (c) Soit $\mathcal{P}$ un chemin excessif de $(0, 0)$ à $(n, n)$.
   Soit $A(k, k + 1)$ le premier point de $\mathcal{P}$ situé strictement au-dessus de la diagonale.
   Au chemin $\mathcal{P}$ on associe alors le chemin $\mathcal{P}'$ défini de la manière suivante :

   — On conserve les $2k + 1$ premiers mouvements, qui amènent de $(0, 0)$ à $A(k, k + 1)$.

   — On inverse chacun des mouvements suivants de $\mathcal{P}$ (tout déplacement vers le haut est transformé en déplacement à droite, et vice-versa.)

   Montrer que le chemin $\mathcal{P}'$ mène du point $(0, 0)$ au point $(n - 1, n + 1)$.

   (d) Montrer que la transformation $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}'$ evoquée ci-dessus réalise une bijection de l'ensemble des chemins excessifs qui vont de $(0, 0)$ à $(n, n)$ vers l'ensemble de tous les chemins qui vont de $(0, 0)$ à $(n-1, n+1)$.

   (e) En déduire que $C_n$ est bien le nombre des chemins de $\Delta$ qui vont de $(0, 0)$ à $(n, n)$.

4. On va maintenant établir une relation de récurrence vérifiée par les $C_n$.
   Soit $\mathcal{P}$ un chemin de $\Delta$, d'origine $A(0, 0)$ et d'extrémité $B(n, n)$, avec $n \geqslant 1$.
   On sait qu'il y a exactement $C_n$ façons de former $\mathcal{P}$.

   (a) On suppose que $\mathcal{P}$ ne rencontre la diagonale $y = x$ qu'en $A$ et $B$.
   Montrer que le nombre de façons différentes de former le chemin $\mathcal{P}$ est $C_{n-1}$.

   (b) On suppose que $\mathcal{P}$ rencontre $y = x$ en au moins un point autre que $A$ et $B$.
   Soit $k$ l'abscisse minimum (comprise entre 1 et $n - 1$) de ces points d'intersection.
   Pour chaque valeur de $k$, montrer qu'il y a $C_{k-1}\,C_{n-k}$ façons de former $\mathcal{P}$.

   (c) En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a $C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

### III. Interprétations combinatoires des nombres de Catalan

Les nombres de Catalan apparaissent dans de très nombreux problèmes d'énumération.
Dans cette partie, où $n$ est fixé, on se propose d'aborder certains de ces problèmes.
Dans les questions suivantes, montrer que le nombre évoqué est toujours égal à $C_n$.
On notera $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ etc. les ensembles énumérés aux questions 1., 2., 3. etc.
On notera également $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des chemins de $\Delta$ qui vont de $(0,0)$ à $(n,n)$.

1. Le nombre de suites $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ de $2n$ éléments de $\{-1,1\}$ telles que :

$$\sum_{k=1}^{2n} x_k = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, m \in \{1,\ldots,2n\},\ \sum_{k=1}^{m} x_k \geqslant 0$$

   Donner les solutions si $n = 3$.

2. Le nombre de suites croissantes $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ avec $y_k \leqslant k$ pour tout $k$.
   Donner les solutions quand $n = 4$.

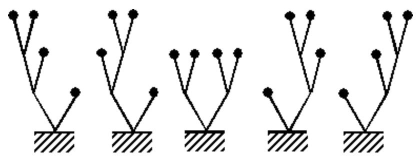
3. Le nombre de suites strictement croissantes $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ avec $z_k < 2k$ pour tout $k$ (indication : $z_k = y_k + k - 1$). Donner les solutions si $n = 4$.

4. Le nombre de suites $d_1, d_2 \ldots, d_n$ de $\mathbb{N}$ telles que $d_{k+1} \leqslant d_k + 1$ pour tout $k$, et en supposant que $d_1$ est dans $\{0,1\}$ (indication : $d_k = k - y_k$). Donner les solutions quand $n = 4$.

5. Le nombre de façons d'écrire $n$ paires de parenthèses pour que chaque parenthèse fermante corresponde à une parenthèse ouvrante. Par exemple, si $n = 3$, il y a cinq possiblités : ((( ))), (( )( )), (( ))( ), ( )(( )) et ( )( )( ).

6. Le nombre de "chaînes de montagnes" formées de $n$ "montées" / et de $n$ "descentes" \.
   La chaîne ne doit jamais descendre à une altitude inférieure à celle du point initial.
   On voit ici un exemple de chaîne avec $n = 6$.

7. Dans cette question, on considère des "arbres binaires enracinés".
   — A la base de l'arbre se trouve un noeud "racine".
   — Chaque noeud, s'il n'est pas une feuille, possède un rameau gauche et un rameau droit.



   On voit ici les arbres binaires enracinés à 4 feuilles.
   On demande de prouver que le nombre d'arbres binaires enracinés à $n+1$ feuilles est $C_n$.
   Indication : raisonner par récurrence forte et utiliser la question (II.4$c$)

8. Soit $E$ un ensemble muni d'un "produit" (celui de $a$ par $b$ est noté $ab$) non associatif.
   Une expression comme $abc$ est donc dépourvue de sens tant qu'on ne choisit pas entre $(ab)c$ et $a(bc)$ : on dira que les deux expressions précédentes sont les parenthésages de $abc$.
   Ainsi les parenthésages de $abcd$ sont : $((ab)c)d$, $(ab)(cd)$, $(a(bc))d$, $a((bc)d)$, et $a(b(cd))$.
   On demande de montrer que le nombre de parenthésages de $a_1a_2\cdots a_{n+1}$ est $C_n$.

9. Douze convives sont assis autour d'une table.
   De combien de manières ces douze personnes peuvent-elles échanger simultanément six poignées de mains sans que deux poignées différentes se croisent au-dessus de la table ?
   On voit ici l'une des $\cdots$ solutions au problème.