Problème : itérées d'une application d'un ensemble fini

Notations

– Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

– On note $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels non nuls.
Dans certaines questions, on sera peut-être amené à donner une valeur particulière à n.

– On note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de toutes les applications de E_n dans lui-même.
Pour désigner un élément f de $\mathcal{F}_n$, on utilisera le tableau $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n-1) & f(n) \end{pmatrix}$.
Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ désigne l'application $f : E_5 \to E_5$ (c-à-d l'élément f de $\mathcal{F}_5$) définie par les égalités $f(1) = 3$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $f(4) = 3$ et $f(5) = 5$.

– Pour tout f de $\mathcal{F}_n$, on définit les *puissances itérées* de f par $\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id} \\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f \circ f^k \end{cases}$
Ainsi $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc.
Il est clair qu'avec une telle définition, on a $f^m \circ f^p = f^p \circ f^m = f^{m+p}$ pour tous m, p de $\mathbb{N}$.

Première partie : étude de trois exemples

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on fixe $n = 10$.

On définit un élément f de $\mathcal{F}_{10}$ par $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 7 & 6 & 4 & 4 & 9 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

On considère également les deux applications

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 4 & 8 & 3 & 9 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 4 & 7 & 9 & 6 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Les applications f, g, h sont-elles bijectives ?
   Dans l'affirmative précisez leur bijection réciproque.
2. Calculer (directement sous la forme de tableaux 2×10, et sans justifications intermédiaires) les applications f^k, avec $2 \leqslant k \leqslant 8$. On constatera notamment que $f^8 = f^2$.
3. Montrer que $f^{k+6} = f^k$ pour tout entier $k \geqslant 2$ (autrement dit la suite des puissances itérées de f est périodique de période 6 à partir de f^2) et que l'ensemble $\{f^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ se réduit aux huit applications (toutes distinctes) $\{\mathrm{Id}, f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7\}$.
   On exprimera cette situation en disant que f est de *délai* 2 et de *période* 6.
4. Calculer de même le délai et la période de l'application g.
5. Calculer enfin le délai et la période de l'application h.

Deuxième partie : généralisation

On va généraliser les observations tirées des trois exemples précédents.
Dans cette partie, n est fixé dans $\mathbb{N}^*$, et f est un élément donné de $\mathcal{F}_n$.

1. Préciser le nombre d'éléments de $\mathcal{F}_n$, c'est-à-dire d'applications de E_n dans lui-même.
2. (a) Montrer que les puissances f^k de f (avec k dans $\mathbb{N}$) ne peuvent pas être toutes distinctes.
   (b) En déduire qu'il existe un plus petit entier $d \geqslant 0$ et un plus petit entier $p \geqslant 1$ tels que $f^{d+p} = f^d$, et que la suite $(f^k)_{k \geqslant 0}$ est périodique de période p à partir de $k = d$.
   On exprime cette situation en disant que f est de *délai* d et de *période* p.

   (c) Montrer que les applications $\mathrm{Id}, f, \ldots, f^d, f^{d+1}, \ldots, f^{d+p-1}$ (c'est-à-dire les $d+p$ premières puissances de f) sont distinctes deux à deux.
   (d) Montrer finalement que l'ensemble $\{f^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ de toutes les puissances de f se réduit à l'ensemble $\{\mathrm{Id}, f, \ldots, f^d, f^{d+1}, \ldots, f^{d+p-1}\}$ de ses $d+p$ premières puissances.

3. Montrer que l'application f est bijective si et seulement si son délai d est nul.

4. Pour tout entier k, on note $\mathrm{Im}\,(f^k) = f^k(E_n) = \{f^k(x),\ x \in E_n\}$.
   L'ensemble $\mathrm{Im}\,(f^k)$ est donc formé des images des éléments de E_n par l'application f^k.
   Du fait que $f^0 = \mathrm{Id}$, on a naturellement $\mathrm{Im}\,(f^0) = E_n$.
   (a) Etudier la suite des $\mathrm{Im}\,(f^k)$ quand (uniquement dans cette question) $n = 10$ et quand f est l'une des trois applications étudiées dans la première partie du problème.
   On se contentera ici d'observations, en remarquant que dans chaque cas les ensembles $\mathrm{Im}\,(f^k)$ sont "emboîtés" avant de se stabiliser. On notera en particulier que l'indice k à partir duquel la suite des $\mathrm{Im}\,(f^k)$ est constante est à chaque fois le *délai* de f.
   (b) Montrer que pour tous entiers j et k, on a $j \leqslant k \Rightarrow \mathrm{Im}\,(f^j) \supset \mathrm{Im}\,(f^k)$.
   Ce résultat signifie que la suite des $\mathrm{Im}\,(f^k)$ est décroissante pour l'inclusion.
   (c) Soit k un entier quelconque supérieur ou égal à d.
   Montrer que $\mathrm{Im}\, f^d = \mathrm{Im}\, f^k$ (indication : on utilisera la question précédente et une égalité $f^{d+qp} = f^d$, où q est un entier convenablement choisi).
   Ce résultat signifie que la suite des $\mathrm{Im}\,(f^k)$ est stationnaire à partir (au plus tard) de l'entier $k = d$, où d est le délai de l'application f.

5. Dans cette question, on suppose $d \geqslant 1$, (donc d'après (3), f n'est pas bijective).
   Depuis (4b) on connait les inclusions $E_n = \mathrm{Im}\,(f^0) \supset \mathrm{Im}\,(f) \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\,(f^d)$.
   On va maintenant prouver que toutes ces inclusions sont strictes.
   On raisonne par l'absurde et on suppose : $\exists\, k \in \{0, \ldots, d-1\},\ \mathrm{Im}\,(f^k) = \mathrm{Im}\,(f^{k+1})$.
   On désigne par φ la restriction de f à l'ensemble $\mathrm{Im}\,(f^k)$.
   (a) Montrer que φ est une application de $\mathrm{Im}\,(f^k)$ dans lui-même et que $\varphi \circ f^k = f^{k+1}$.
   (b) Prouver que φ est une bijection de $\mathrm{Im}\,(f^k)$.
   (c) Pour tout entier naturel m, montrer que $\varphi^m \circ f^k = f^{k+m}$.
   (d) Par un argument analogue à ceux de (3), montrer : $\exists\, m \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^m = \mathrm{Id}$.
   En déduire l'égalité $f^{k+m} = f^k$ avec $m \geqslant 1$, puis une contradiction.

6. (a) Déduire de la question (5) que le délai de $f : E_n \to E_n$ est toujours inférieur ou égal à $n-1$.
   (b) Donner l'exemple d'une application $f : E_n \to E_n$ qui soit de délai $n-1$.

7. Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}\,(f^d)$ est une bijection de $\mathrm{Im}\,(f^d)$ sur lui-même.

8. Résumez les résultats obtenus dans cette partie.