Idéaux et blocs d'un anneau.

Dans tout le problème, A désigne un anneau non commutatif.

— On dit qu'une partie non vide I de A est un *idéal* de A si :

Pour tous x, y de I, pour tout a de A, l'élément $a(x-y)$ est dans I.

— On dit qu'une partie non vide B de A est un *bloc* de A si :

Pour tous x, y, z de B, pour tout a de A, l'élément $a(x-y)+z$ est dans B.

I. Généralités sur les idéaux

1. Vérifier que $\{0\}$ et A sont deux idéaux de A (idéaux *triviaux*).
   Montrer qu'un idéal I de A est un sous-groupe de $(A,+)$. Préciser les idéaux de $\mathbb{Z}$.
2. Soit I un idéal de A. Montrer que $\forall\,(a,x) \in A \times I,\ ax \in I$.
   Montrer que si I contient un élément inversible de A, alors $I = A$. Décrire les idéaux d'un corps.
3. Soient I et J deux idéaux de A. On pose $I+J = \{x+y,\ x \in I,\ y \in J\}$.
   Montrer que $I \cap J$ et $I+J$ sont des idéaux de A.
4. Soit I un idéal de A. On note $\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}$.
   (a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A qui contient I. Préciser $\sqrt{A}$ et interpréter $\sqrt{\{0\}}$.
   (b) Pour tous idéaux I, J de A, montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
   (c) Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$ tels que $\sqrt{I} = I$? Simplifier $\sqrt{360\mathbb{Z}}$.

II. Généralités sur les blocs

1. Montrer que tout idéal est un bloc. Vérifier que tout singleton est un bloc.
   Montrer qu'un bloc est un idéal si et seulement s'il contient 0.
2. Soit B un bloc de A, et soit t un élément de A.
   Montrer que l'ensemble noté $B+t$ et égal à $\{b+t,\ b \in B\}$ est un bloc de A.
3. Montrer qu'une partie B de A est un bloc si et seulement s'il existe un élément t de A et un idéal I de A tels que $B = I+t$ (voir notations précédentes.)
   Vérifier alors qu'à B fixé l'idéal I est unique, et que $B = I+t \Leftrightarrow t \in B$.
   On dit que l'idéal I est la *direction* du bloc B. Vérifier que $I+t = I+t' \Leftrightarrow t'-t \in I$.
   Quels sont les blocs de l'anneau $\mathbb{Z}$?
4. Montrer que si B et C sont des blocs il en est de même de $B+C$.
   A quelle condition peut-on dire que $B \cap C$ est un bloc ?
   Montrer sur un exemple qu'on ne peut pas généraliser aux blocs le résultat de $(I4a)$.
5. Soient $f : A \to A'$ un morphisme d'anneaux commutatifs.
   Soit B' un bloc de A'. Montrer que si $B = \overset{-1}{f}(B')$ est non vide, c'est un bloc de A.
   Montrer que pour tout b de $\operatorname{Im} f$, l'ensemble $\{x \in A,\ f(x) = b\}$ est un bloc de A.

III. Relation d'équivalence associée à un idéal

Soit I un idéal de A. On définit une relation sur A par : $a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow b - a \in I$.

Soit $\mathcal{B}_I$ l'ensemble des blocs de A de direction I, c'est-à-dire des $I_t = t + I$, avec t dans A.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.
2. Prouver que les classes d'équivalence de A pour $\mathcal{R}$ sont les I_t, avec t dans A.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_I$ est muni d'une structure d'anneau commutatif quand on le munit des opérations suivantes (dont on justifiera qu'elles ont un sens) : $\forall\,(t,u) \in A^2,\ I_t + I_u = I_{t+u}$ et $I_t I_u = I_{tu}$.
4. Montrer que $\mathcal{B}_I$ est un corps si et seulement I est inclus dans exactement deux idéaux de A (I et lui-même).