

# Homographies du plan complexe

## Notations

- On note  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  l'ensemble obtenu en ajoutant à  $\mathbb{C}$  un *point à l'infini*.  
Pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}^*$ , on pose par convention  $z/0 = \infty$ .
- Pour tout quadruplet  $v = (a, b, c, d)$  de  $\mathbb{C}^4$ , on note  $\delta(v) = ad - bc$ .  
On note  $E = \{v = (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, \delta(v) \neq 0\}$ .  
A tout élément  $v$  de  $E$  on associe l'application  $h_v$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$  dans lui-même définie par :  
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, h_v(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad h_v(-d/c) = \infty, \quad h_v(\infty) = a/c.$$
- Remarque : la convention  $z/0 = \infty$  permet d'inclure le cas  $c = 0$  dans la définition de  $h_v$ .  
Plus précisément, si  $c = 0$  (donc  $a \neq 0$  et  $d \neq 0$ ) :  $\forall z \in \mathbb{C}, h_v(z) = \frac{az + b}{d}$ , et  $h_v(\infty) = \infty$ .
- On note  $\mathcal{H} = \{h_v, v \in E\}$ . Les éléments de  $\mathcal{H}$  sont appelées *homographies* de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- Pour tout  $(a, b)$  de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ , on note  $s_{a,b} = h_{a,b,0,1}$ . On note  $\mathcal{S} = \{s_{a,b}, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$ .  
L'application  $s_{a,b}$  est donc définie par  $s_{a,b}(z) = az + b$  si  $z \in \mathbb{C}$  et  $s_{a,b}(\infty) = \infty$ .  
Les éléments de  $\mathcal{S}$  sont appelés *similitudes directes* de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- On considère le plan euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct.  
On identifie tout point  $M$  de ce plan avec son affixe  $z$  de  $\mathbb{C}$ .  
Cette identification permet de parler des cercles et des droites de  $\mathbb{C}$ .
- Une droite de  $\widehat{\mathbb{C}}$  est la réunion  $\widehat{\Delta} = \Delta \cup \{\infty\}$ , où  $\Delta$  est une droite de  $\mathbb{C}$ .  
On dit qu'une partie de  $\widehat{\mathbb{C}}$  est un cercle de  $\widehat{\mathbb{C}}$  si c'est un cercle de  $\mathbb{C}$  ou une droite de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  
Les droites de  $\widehat{\mathbb{C}}$  sont donc les cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$  qui contiennent le point à l'infini.  
Remarque : on considère dans ce problème que les cercles ont un rayon *strictement* positif.
- On note  $\widehat{\mathcal{C}}$  l'ensemble dont les éléments sont les cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

## I. Le groupe des homographies

1. Soient  $u$  un élément de  $E$ . Vérifier que  $h_{\lambda u} = h_u$  pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{C}^*$ .  
On admettra que la réciproque est vraie. Ainsi  $h_u = h_v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, v = \lambda u$ .  
Identifier l'application  $h_u$  quand  $u = (1, 0, 0, 1)$ .
2. Soient  $u = (a, b, c, d)$  et  $v = (a', b', c', d')$  deux éléments de  $E$ .  
Vérifier que  $u \otimes v = (aa' + bc', ab' + bd', ca' + dc', cb' + dd')$  est un élément de  $E$ .  
Montrer que  $h_u \circ h_v = h_{u \otimes v}$  (on pourra se limiter au cas général).
3. Montrer que toute homographie  $h_v$  est une bijection de  $\widehat{\mathbb{C}}$  sur lui-même.  
On vérifiera plus précisément que  $h_v^{-1} = h_{v'}$  avec  $v' = (d, -b, -c, a)$ .
4. Montrer que  $\mathcal{H}$  est un groupe (non commutatif) pour la loi de composition.

## II. L'homographie $z \mapsto 1/z$ et les cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$

On va montrer que l'homographie  $z \mapsto 1/z$  est une involution de l'ensemble des cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

1. (a) Soit  $\Delta$  une droite de  $\mathbb{C}$  ne passant pas par 0.

Soit  $\omega$  la projection orthogonale de 0 sur  $\Delta$ .

Soit  $z$  dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $z$  est sur  $\Delta$  si et seulement si  $\operatorname{Re}((z - \omega)\bar{\omega}) = 0$ .

- (b) Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de  $\mathbb{C}$ , et soient  $u, v$  deux points diamétralement opposés de  $\mathcal{C}$ .

Soit  $z$  dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que :  $z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \operatorname{Re}((z - u)(\bar{z} - \bar{v})) = 0$ .

2. On note  $\varphi = h_{(0,1,1,0)}$ . Vérifier que l'application  $\varphi$  est une involution de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

En utilisant les résultats de la question II.1, montrer successivement que l'image par  $\varphi$  :

- (a) D'une droite  $\Delta$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$  passant par 0 est une droite de  $\widehat{\mathbb{C}}$  passant par 0.

Comment ces deux droites se déduisent-elles l'une de l'autre ?

- (b) D'un cercle  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{C}$  passant par 0 est une droite de  $\widehat{\mathbb{C}}$  ne passant pas par 0.

Indication : si  $\omega$  est le point de  $\mathcal{C}$  diamétralement opposé de 0, et si on pose  $\omega' = \varphi(\omega)$ , on montrera que  $\varphi(\mathcal{C})$  est la droite orthogonale en  $\omega'$  au segment  $[0, \omega']$ .

- (c) D'une droite de  $\widehat{\mathbb{C}}$  ne passant pas par 0 est un cercle de  $\mathbb{C}$  passant par 0.

- (d) D'un cercle de  $\mathbb{C}$  ne passant pas par 0 est un cercle de  $\mathbb{C}$  ne passant pas par 0.

Indication : soit  $u, v$  deux points diamétralement opposés de  $\mathcal{C}$  et alignés avec 0. Montrer que  $\varphi(\mathcal{C})$  est le cercle de diamètre  $[\varphi(u), \varphi(v)]$

3. On note encore  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{C}})$  par  $X \mapsto \varphi(X) = \{\varphi(z), z \in X\}$ .

Déduire de ce qui précède que  $\varphi$  réalise une involution de l'ensemble  $\widehat{\mathcal{C}}$ .

## III. Homographies et cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$

On va généraliser le résultat de la partie précédente, et montrer que toute homographie de  $\widehat{\mathbb{C}}$  réalise une bijection de l'ensemble des cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$  sur lui-même.

1. Montrer que  $\mathcal{S}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{H}$ .

2. Soit  $s$  un élément de  $\mathcal{S}$ , considéré aussi comme application de  $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{C}})$  dans lui-même.

Montrer que  $s$  réalise une bijection de l'ensemble  $\widehat{\mathcal{C}}$ .

3. Montrer que tout élément  $h = h_u$  (avec  $u = (a, b, c, d)$ ) de  $\mathcal{H}$  est :

– Ou bien une similitude directe (si  $c = 0$ ),

– Ou bien (si  $c \neq 0$ ) la composée de  $\varphi$  et de deux similitudes directes.

Indication : montrer que  $h = s_{a',b'} \circ \varphi \circ s_{c,d}$ , avec  $a' = -\delta(u)/c$  et  $b' = a/c$ .

4. En déduire que toute homographie  $h$  réalise une bijection de  $\widehat{\mathcal{C}}$  sur lui-même.

Si  $h = h_{(a,b,c,d)}$  est une homographie qui n'est pas une similitude (donc si  $c \neq 0$ ), décrire rapidement l'image d'une droite de  $\widehat{\mathbb{C}}$  ou d'un cercle de  $\mathbb{C}$  selon que cette droite ou ce cercle passe ou ne passe pas par le point  $\omega = -d/c$ .

#### IV. Homographies et conservation des angles

NB : à ce stade de l'année en MPSI, cette partie est hors-barème.

Dans cette partie, on se donne une homographie  $h = h_{(a,b,c,d)}$ .

Soit  $\begin{cases} \gamma_1 : t \in I_1 \mapsto z_1(t) \\ \gamma_2 : t \in I_2 \mapsto z_2(t) \end{cases}$  deux arcs paramétrés de  $\mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , sans points stationnaires.

On suppose que leurs supports ne contiennent pas  $-d/c$ .

On peut donc en composant par  $h$  définir les arcs paramétrés  $\begin{cases} t \mapsto \Gamma_1(t) = h(z_1(t)) \\ t \mapsto \Gamma_2(t) = h(z_2(t)) \end{cases}$

1. Montrer que les arcs  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et sans points stationnaires.
2. Soit  $A = z_1(t_1) = z_2(t_2)$  un point commun aux deux arcs paramétrés  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .  
Soit  $B = Z_1(t_1) = Z_2(t_2)$  le point commun correspondant sur les arcs  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .  
Soit  $T_1$  et  $T_2$  les droites tangentes en  $A$  aux arcs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .  
Soit  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  les droites tangentes en  $B$  aux arcs  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Montrer que l'angle de droites  $(\widehat{T_1, T_2})$  est égal à l'angle de droites  $(\widehat{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2})$ .

On exprimera cette propriété en écrivant qu'une homographie *conserve les angles*.

3. On rappelle que deux cercles de  $\mathbb{C}$  sont dits orthogonaux s'ils sont sécants et si les deux tangentes en l'un des points d'intersection sont orthogonales. On dira qu'une droite de  $\widehat{\mathbb{C}}$  est orthogonale à un cercle de  $\mathbb{C}$  si elle contient un diamètre de ce cercle.

On peut donc parler de l'orthogonalité éventuelle de deux cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Avec ces définitions, déduire de ce qui précède que toute homographie transforme deux cercles orthogonaux de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en deux cercles orthogonaux de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

#### V. Homographies et conservation de l'orthogonalité

On va montrer à nouveau que les homographies transforment les cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en des cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , et qu'elles conservent leur orthogonalité.

Contrairement à la méthode utilisée dans la partie IV, et qui utilisait des techniques de géométrie différentielle, on utilise ici une méthode purement algébrique.

On commence par le cas particulier de l'homographie  $z \mapsto 1/z$ , avant de généraliser.

1. Montrer qu'une partie  $\Gamma$  de  $\mathbb{C}$  est un cercle ou une droite si et seulement si :  
 $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , avec  $\alpha\gamma < |\beta|^2$  tels que :  $z \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$ .  
On montrera qu'on obtient un cercle si  $\alpha \neq 0$  et une droite si  $\alpha = 0$ .
2. Retrouver le résultat II.2 disant que  $\varphi$  transforme les cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en des cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
3. On se donne le cercle  $\mathcal{C}_1$  de centre  $\omega_1$  de rayon  $r_1$ , et le cercle  $\mathcal{C}_2$  de centre  $\omega_2$  de rayon  $r_2$ .  
Montrer que  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont orthogonaux si et seulement si  $|\omega_2 - \omega_1|^2 = r_1^2 + r_2^2$ .

4. On se donne deux droites ou cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  de  $\mathbb{C}$  définis par les équations respectives :

$$\begin{cases} (E) : \alpha|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \\ (E') : \alpha'|z|^2 + \bar{\beta}'z + \beta'\bar{z} + \gamma' = 0 \end{cases}, \text{ avec } \begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha\gamma < |\beta|^2 \\ \alpha'\gamma' < |\beta'|^2 \end{cases}$$

Montrer que  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont orthogonaux si et seulement si  $\alpha\gamma' + \alpha'\gamma = \beta\bar{\beta}' + \bar{\beta}\beta'$ .

(traiter le cas de deux cercles, puis de deux droites, puis d'une droite et d'un cercle.)

5. En déduire que l'homographie  $z \mapsto 1/z$  conserve l'orthogonalité des cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  
Généraliser ensuite à une homographie quelconque (utiliser III.3)

## VI. Homographies, disques et demi-plans

On reprend ici les notations et les résultats de la cinquième partie.

On sait donc qu'une homographie conserve l'ensemble des cercles de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . On va voir ici comment les homographies transforment l'intérieur ou l'extérieur d'un cercle de  $\mathbb{C}$ , ou les deux demi-plans délimités par une droite de  $\mathbb{C}$ .

Comme dans la partie V, on commence par examiner le cas de l'homographie  $z \mapsto 1/z$ , avant de généraliser à une homographie quelconque.

Soit  $\Gamma$  une droite ou un cercle de  $\mathbb{C}$ .

On note  $Q(z) = 0$  une équation de  $\Gamma$ , avec  $Q(z) = \alpha |z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma$  et  $\begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ \alpha\gamma < |\beta|^2 \end{cases}$

Rappel :  $\Gamma$  est un cercle si  $\alpha \neq 0$  et une droite sinon.

Quitte à considérer  $-Q$  plutôt que  $Q$ , on suppose  $\alpha \geq 0$ .

1. Avec les notations précédentes, on définit les ensembles  $\begin{cases} \Gamma^+ = \{z \in \mathbb{C}, Q(z) > 0\} \\ \Gamma^- = \{z \in \mathbb{C}, Q(z) < 0\} \end{cases}$

Montrer que chacun de ces deux ensembles désigne :

- Ou bien l'intérieur ou bien l'extérieur de  $\Gamma$ , si  $\Gamma$  est un cercle de  $\mathbb{C}$ .
- Chacun des deux demi-plans de  $\mathbb{C}$  définis par  $\Gamma$ , si  $\Gamma$  est une droite de  $\mathbb{C}$ .

2. On pose  $\varphi : z \mapsto 1/z$ . On sait que  $\tilde{\Gamma} = \varphi(\Gamma)$  est un cercle ou une droite.

Ecrire une équation  $\tilde{Q}(z) = 0$  de  $\tilde{\Gamma}$ , facilement déduite de l'équation  $Q(z) = 0$ .

En déduire que  $\varphi$  envoie respectivement les deux parties du plan séparées par  $\Gamma$  sur celles qui sont séparées par  $\tilde{\Gamma}$ .

3. Généraliser le résultat de la question précédente à une homographie quelconque.

On pourra, si le temps le permet, donner quelques précisions supplémentaires.

## VII. Points fixes d'une homographie, birapport

— Soit  $f$  une application quelconque de  $\widehat{\mathbb{C}}$  dans lui-même.

On dit qu'un élément  $z$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$  (éventuellement  $z = \infty$ ) est un *point fixe* de  $f$  si  $f(z) = z$ .

— Soient  $z_1, z_2, z_3$  trois éléments distincts de  $\mathbb{C}$ . Soit  $z$  un élément de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

On pose  $[z_1, z_2, z_3, z] = \frac{(z_3 - z_1)(z - z_2)}{(z_3 - z_2)(z - z_1)}$  si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ , et  $\begin{cases} [z_1, z_2, z_3, z_1] = \infty \\ [z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \end{cases}$

Il est clair que l'application  $z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$  est une homographie de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

1. (a) En revenant aux définitions donnée en début d'énoncé, vérifier que les homographies qui ne possèdent que  $\infty$  comme point fixe sont les similitudes.  
(b) Montrer que toute homographie distincte de l'identité possède un ou deux points fixes (éventuellement confondus).

2. Soit  $f$  une homographie distincte de l'identité. Montrer l'équivalence suivante :

$f$  est involutive  $\Leftrightarrow \exists (u, v) \in \widehat{\mathbb{C}}^2$  (avec  $u \neq v$ ) tels que  $f(u) = v$  et  $f(v) = u$ .

3. Dans  $\mathbb{C}$ , soient  $z_1, z_2, z_3$  (distincts deux à deux) et  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  (distincts deux à deux.)

Montrer qu'il existe une homographie  $h$  unique telle que  $h(z_k) = \omega_k$  pour  $1 \leq k \leq 3$ .

Indication : considérer les homographies  $h : z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$  et  $k : z \mapsto [\omega_1, \omega_2, \omega_3, z]$ .

On s'intéressera aux images de  $z_1, z_2, z_3$  (resp.  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) par  $h$  (resp.  $k$ ).

4. Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4$  quatre éléments distincts de  $\mathbb{C}$  (avec éventuellement  $z_4 = \infty$ .)  
La quantité  $[z_1, z_2, z_3, z_4]$  est appelée *birapport* de  $z_1, z_2, z_3, z_4$  (dans cet ordre.)  
Montrer que  $z_1, z_2, z_3, z_4$  sont sur un même cercle de  $\widehat{\mathbb{C}} \Leftrightarrow [z_1, z_2, z_3, z_4]$  est un réel.  
Indication : considérer l'homographie  $h : z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$ .
5. Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4$  quatre éléments distincts de  $\mathbb{C}$  (avec éventuellement  $z_4 = \infty$ .)  
Soit  $f$  une homographie de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . On suppose que  $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$  sont distincts de  $\infty$ .  
Montrer que  $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ .  
On exprime cette propriété en disant qu'une homographie *conserve le birapport*.  
Indication : Montrer que  $f = h^{-1} \circ g$ , avec  $\begin{cases} g : z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z] \\ h : z \mapsto [f(z_1), f(z_2), f(z_3), z] \end{cases}$
6. Réciproquement, on se donne une application  $f$  injective de  $\widehat{\mathbb{C}}$  dans lui-même.  
On suppose que  $f$  conserve le birapport. Montrer que  $f$  est une homographie.  
Indication :  
– Se donner  $z_1, z_2, z_3$  distincts dans  $\mathbb{C}$ , avec  $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$  distincts de  $\infty$ .  
– Montrer que  $f = h^{-1} \circ g$ , avec  $g : z \mapsto [z_1, z_2, z_3, z]$  et  $h : z \mapsto [f(z_1), f(z_2), f(z_3), z]$ .

### VIII. Conjugaison des homographies

On note  $\text{Aut}(\mathcal{H})$  le groupe des automorphismes de  $\mathcal{H}$  pour la loi de composition.

Pour toute homographie  $h$ , on note  $\Phi_h$  l'application de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  définie par  $\Phi_h(f) = h \circ f \circ h^{-1}$ .

On dit que deux homographies  $f$  et  $g$  sont *conjuguées* s'il existe  $h$  dans  $\mathcal{H}$  telle que  $g = \Phi_h(f)$ .

On exprimera cette notation en écrivant  $f \sim g$ .

1. Dans cette question, on étudie l'application  $\Phi$  définie sur  $\mathcal{H}$  par  $\Phi(h) = \Phi_h$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est un morphisme de  $\mathcal{H}$  dans le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{H})$ .
  - (b) On considère les éléments  $t : z \mapsto z + 1$  et  $s_a : z \mapsto 2a - z$  de  $\mathcal{H}$  (avec  $a \in \mathbb{C}$ ).  
Montrer que la seule homographie qui commute avec  $t$  et les  $s_a$  est l'identité.
  - (c) En déduire que le morphisme  $\Phi$  est injectif.
2. Dans cette question, on aborde l'étude de la relation *conjugaison* définie sur  $\mathcal{H}$  par  $f \sim g$ .
  - (a) Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{H}$ .  
Quelle est la classe d'équivalence de l'application identité?  
Vérifier que si  $f \sim g$  alors  $f^n \sim g^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
  - (b) Montrer que deux homographies conjuguées ont exactement le même nombre de points fixes dans  $\widehat{\mathbb{C}}$  (un point fixe *double* n'étant compté qu'une fois.)
  - (c) Montrer que les translations distinctes de  $\text{Id}$  sont conjuguées deux à deux.
  - (d) Pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , on note  $\sigma_\lambda$  la similitude  $z \mapsto \lambda z$ .  
Montrer que  $\sigma_\lambda$  et  $\sigma_\mu$  sont conjuguées si et seulement si  $\mu = \lambda$  ou  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ .

3. Dans cette question, on va déterminer les différentes classes d'équivalence de  $\mathcal{H}$  pour la relation de conjugaison, ainsi qu'un représentant simple de chaque classe.

(a) Soit  $f$  une homographie ayant deux points fixes distincts  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{C}$ .

On note  $h$  l'homographie définie par  $z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ . Montrer qu'il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  (qu'on ne calculera pas) tel que  $f = h^{-1} \circ \sigma_\lambda \circ h$ .

(b) Soit  $f$  une similitude directe. On suppose que  $f$  n'est pas une translation.

Soit  $\alpha$  l'unique point fixe de  $f$  dans  $\mathbb{C}$ , et soit  $h$  l'application  $z \mapsto z - \alpha$ .

Montrer qu'il existe  $\lambda$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  tel que  $f = h^{-1} \circ \sigma_\lambda \circ h$ .

(c) Soit  $f$  une homographie ayant deux points fixes confondus en  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

On note  $h$  l'homographie définie par  $h(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ .

Montrer qu'il existe une translation  $t$  (distincte de Id) telle que  $f = h^{-1} \circ t \circ h$ .

(d) Dédurre de ce qui précède le résultat suivant :

— Si  $f$  n'a qu'un point double dans  $\widehat{\mathbb{C}}$ , elle est conjuguée à la translation  $z \mapsto z + 1$ .

— Sinon il existe  $\lambda$  avec  $0 < |\lambda| \leq 1$  tel que  $f$  soit conjuguée à  $\sigma_\lambda : z \mapsto \lambda z$ .

On vérifiera que si  $0 < |\lambda| < 1$ , le coefficient  $\lambda$  est unique, alors que si  $|\lambda| = 1$ , il est unique à condition de supposer  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ .

## IX. Puissances d'homographies

On va utiliser les résultats de la partie VIII (entre autres) pour étudier les puissances d'une homographie. Dans un premier temps, on va vérifier que les homographies dont une puissance est Id sont conjuguées à des rotations particulières. On étudie ensuite la suite définie par les images itérées d'un point de  $\widehat{\mathbb{C}}$  par une homographie donnée. On terminera cette partie en se demandant s'il existe une homographie permutant circulairement  $n$  points donnés de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

1. Dans cette question, on va obtenir des résultats sur les homographies dont une certaine puissance est l'application identité.

(a) Soit  $f$  une homographie de  $\widehat{\mathbb{C}}$  et  $n$  un entier naturel non nul.

Montrer que  $f^n = \operatorname{Id}$  si et seulement si  $f$  est conjuguée à  $\sigma_\lambda$ , avec  $\lambda^n = 1$ .

(b) Soit  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  une homographie ( $f \neq \operatorname{Id}$ ).

On note  $f = h_u$ , avec  $u = (a, b, c, d)$ .

En utilisant uniquement la partie I, montrer que :  $f^2 = \operatorname{Id} \Leftrightarrow d = -a$ .

(c) Soient  $\alpha, \beta$  deux éléments distincts de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . En utilisant (3a), (3b) et (4) indiquer l'unique homographie involutive de  $\widehat{\mathbb{C}}$  ayant pour points fixes  $\alpha$  et  $\beta$  (on traitera d'abord le cas où  $\alpha, \beta$  sont dans  $\mathbb{C}$ , puis on supposera  $\beta = \infty$ .)

(d) Comme précédemment, soient  $\alpha, \beta$  deux éléments distincts de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Trouver les deux seules homographies  $f$  qui sont distinctes de Id, qui vérifient  $f^3 = \operatorname{Id}$  et qui admettent  $\alpha, \beta$  comme points fixes.

(e) Donner les trois homographies  $f \neq \operatorname{Id}$  telles que  $f^4 = \operatorname{Id}$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(-1) = -1$ .

Si  $f_1, f_2, f_3$  sont les solutions, vérifier que  $\{\operatorname{Id}, f_1, f_2, f_3\}$  est un groupe cyclique.

2. On va étudier s'il existe des homographies permutant circulairement 2, 3 ou 4 points.
- (a) Soient  $u, v$  deux points distincts de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  
Déterminer la forme générale des homographies  $f$  telles que  $f(u) = v$  et  $f(v) = u$ .  
Indication : utiliser les résultats questions VII.2 et IX.1.b.  
On pourra supposer d'abord que  $u, v$  sont dans  $\mathbb{C}$ , puis que  $v = \infty$ .
- (b) Soient  $u, v, w$  trois points distincts de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Montrer qu'il existe une unique homographie  $f$  telle que  $f(u) = v, f(v) = w, f(w) = u$  et que cette application vérifie  $f^3 = \text{Id}$ .  
Montrer que  $f$  laisse globalement invariant le cercle de  $\widehat{\mathbb{C}}$  passant par  $u, v, w$ .  
Déterminer l'unique homographie  $f$  telle que  $f(0) = 1, f(1) = i, f(i) = 0$ .
- (c) On se donne quatre points distincts  $t, u, v, w$  dans  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  
On cherche s'il existe  $f$  dans  $\mathcal{H}$  telle que  $f(t) = u, f(u) = v, f(v) = w, f(w) = t$ .  
Montrer que si  $f$  existe, alors elle est unique et elle vérifie  $f^4 = \text{Id}$ .  
Montrer que  $f$  existe si et seulement si  $[t, v, u, w] = -1$  (utiliser VII.6)
3. Dans cette question on se donne une homographie  $f \neq \text{Id}$  et un élément  $z_0$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .  
On définit une suite de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en posant  $z_{n+1} = f(z_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
- (a) On suppose que  $f$  ne possède qu'un seul point fixe  $\alpha$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ .
- (b) On suppose que  $f$  a deux points fixes distincts  $\alpha$  et  $\beta$ , et que  $z_0 \notin \{\alpha, \beta\}$ .  
Montrer qu'on est dans l'une des trois situations suivantes :  
— Pour tout choix de  $z_0$ , la suite  $(z_n)$  converge vers  $\alpha$ .  
— Pour tout choix de  $z_0$ , la suite  $(z_n)$  converge vers  $\beta$ .  
— Pour tout choix de  $z_0$ , la suite  $(z_n)$  diverge.  
Remarque : dans  $\widehat{\mathbb{C}}$ , on dit que la suite  $(z_n)$  converge vers  $\infty$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$ .

## X. Homographies envoyant un disque donné sur un disque donné

- On note  $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ ,  $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , et  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ .  
— On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des homographies  $h : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ , avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  (et  $ad - bc \neq 0$ ).

On désigne par  $\mathcal{R}^+$  celles de ces homographies qui vérifient  $ad - bc > 0$ .

1. (a) Montrer que  $\mathcal{R}^+$  est un sous-groupe de  $\mathcal{R}$ , lui-même un sous-groupe de  $\mathcal{H}$ .  
(b) Montrer  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des homographies laissant  $\widehat{\mathbb{R}}$  globalement invariant.  
(c) Montrer  $\mathcal{R}^+$  est l'ensemble des homographies laissant  $\mathbb{P}$  globalement invariant.
2. (a) Montrer que l'homographie  $H : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$  vérifie  $H(\mathbb{P}) = \mathbb{D}$ .  
(b) En déduire que les homographies  $f$  telles que  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  sont les homographies qui sont données par  $f : z \mapsto u \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z}$  avec  $|u| = 1$  et  $|\gamma| < 1$ .  
(c) Notons  $\mathbb{D}_{\omega, r}$  le disque ouvert de centre  $\omega \in \mathbb{C}$  et de rayon  $r > 0$ .  
Déterminer les homographies  $h$  qui envoient  $\mathbb{D}_{\omega, r}$  sur  $\mathbb{D}_{\omega', r'}$ .