Fractions continues

Notations

— On notera $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de tout réel x.

— On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathbb{R}$ telles que $a_n > 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Pour toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ appartenant à $\mathcal{S}$ on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ [\, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \,] \;=\; a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{1}$$

En particulier :

$$[\, a_1 \,] = a_1,\ [\, a_1, a_2 \,] = a_1 + \frac{1}{a_2},\ [\, a_1, a_2, a_3 \,] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

Il est clair que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont rationnels, alors $[\, a_1, a_2, \ldots, a_n \,]$ est rationnel.

— Les identités suivantes découlent immédiatement de la définition :

$$\forall n \geqslant 2,\ [\, a_1, a_2, \ldots, a_n \,] \;=\; a_1 + \frac{1}{[\, a_2, \ldots, a_n \,]} \tag{2}$$

$$\forall n \geqslant 2,\ [\, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \,] \;=\; \left[\, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \,\right] \tag{3}$$

— On observe que si $a_n > 1$, l'égalité $a_n = (a_n - 1) + \dfrac{1}{1}$ permet d'écrire :

$$[\, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \,] = [\, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1 \,] \tag{4}$$

— A toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathbb{R}$, on associe les suites (p_n) et (q_n) définies par :

$$\begin{cases} p_{-1} = 0 \\ q_{-1} = 1 \end{cases},\qquad \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \end{cases},\qquad \text{et}\quad \forall n \geqslant 1\ \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \tag{5}$$

En particulier : $\begin{cases} p_1 = a_1 \\ q_1 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} p_2 = a_2 a_1 + 1 \\ q_2 = a_2 > 0 \end{cases}$

Une récurrence évidente de pas 2 montre que pour tout $n \geqslant 1$, on a $q_n > 0$.

Partie I

Dans cette partie, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ désigne un élément quelconque de $\mathcal{S}$.

Les relations (5) permettent de lui associer les suites (p_n) et (q_n).

1. Dans cette question, on va prouver la relation suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ [\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n\ ] = \frac{p_n}{q_n} \tag{6}$$

   (a) Vérifier que la relation (6) est vérifiée pour les indices $n = 1, 2, 3$.

   (b) On fixe un indice $n \geqslant 1$ et on définit la suite (a') par :

$$\forall\, k \neq n,\ a'_k = a_k \qquad \text{et} \qquad a'_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$$

   Comme dans les égalités (5), on associe à la suite (a') les suites (p') et (q').

   Montrer l'égalité $\dfrac{p'_n}{q'_n} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

   (c) Montrer que l'égalité (6) est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

2. Etablir les relations suivantes :

   (a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^{n+1}$

   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$[\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}\ ] = [\ a_1,\ \ldots,\ a_n\ ] + \frac{(-1)^{n+1}}{q_n\, q_{n+1}} \tag{7}$$

   (c) Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$[\ a_1,\ \ldots,\ a_n] = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{q_k\, q_{k+1}} \tag{8}$$

3. Dans cette question, n est un entier $\geqslant 2$ et t est un réel > 0.

   (a) Par un raisonnement analogue à celui de la question I.1.b, montrer l'égalité :

$$[\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ t\ ] = \frac{tp_n + p_{n-1}}{tq_n + q_{n-1}} \tag{9}$$

   (b) En déduire les deux égalités :

$$[\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ t\ ] - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n(tq_n + q_{n-1})} \tag{10}$$

$$[\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ t\ ] - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n t}{q_{n-1}(tq_n + q_{n-1})} \tag{11}$$

Partie II

Dans cette partie, la suite (a_n) est à valeurs entières.

Plus précisément : $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall\, n \geqslant 2,\ a_n \in \mathbb{N}^*$.

A la suite (a_n) on associe comme précédemment les suites (p_n) et (q_n).

Pour simplifier les notations, on pourra poser : $\forall\, n \geqslant 1,\ r_n = [\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n\,]$.

On rappelle que $\forall\, n \geqslant 1,\ r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

1. (a) Montrer que $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathbb{Z}$.
   Prouver que $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathbb{N}^*$, strictement croissante à partir de $n = 2$.
   Qu'en déduit-on concernant $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$?

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que p_n et q_n sont premiers entre eux.

2. Dans cette question, on montre que la suite (r_n) est convergente vers un irrationnel.

   (a) Montrer que la suite de terme général r_{2n} est strictement décroissante et que la suite de terme général r_{2n-1} est strictement croissante (utiliser I.2.b).

   (b) Montrer alors que la suite (r_n) est convergente. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $0 < \left|\ell - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leqslant \dfrac{1}{q_n^2}$.

   (d) En déduire que ℓ est un nombre irrationnel

Partie III

Soit x un nombre réel. On pose $x_1 = x$ et on note $a_1 = \mathrm{E}(x_1)$ sa partie entière.

— Si x_1 est un entier, c'est-à-dire si $x_1 = a_1$, on arrête là...

— Sinon, c'est-à-dire si $0 < x_1 - a_1 < 1$, on pose : $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} > 1$.
On a donc : $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2} = [a_1, x_2]$. On pose alors $a_2 = \mathrm{E}(x_2) \geqslant 1$.

— Si x_2 est un entier, c'est-à-dire si $a_2 = x_2$, on arrête là... On a alors $x_1 = [a_1, a_2]$.

— Sinon, c'est-à-dire si $0 < x_2 - a_2 < 1$, on pose : $x_3 = \dfrac{1}{x_2 - a_2} > 1$.
On a donc : $x_2 = a_2 + \dfrac{1}{x_3} = [a_2, x_3]$ et $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2} = a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{x_3}} = [a_1, a_2, x_3]$.
On note alors $a_3 = \mathrm{E}(x_3) \geqslant 1$ la partie entière de x_3.

On construit donc successivement $x_1, a_1, x_2, a_2, \ldots, x_n, a_n, \ldots$ de la manière suivante :

— $x_1 = x$ et $a_1 = \mathrm{E}(x_1)$ (a_1 est un élément de $\mathbb{Z}$).

— Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Si x_n existe, on a $x = [\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, x_n\,]$ et on pose $a_n = \mathrm{E}(x_n)$.
Si x_n est un entier ($a_n = x_n$) on arrête là... On a alors $x = [\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n\,]$.
Sinon, on pose $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n} > 1$ et $a_{n+1} = \mathrm{E}(x_{n+1}) \in \mathbb{N}^*$.
Avec cette définition, on a bien : $x = \left[\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}\,\right] = [\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n,\, x_{n+1}\,]$

Le procédé décrit ci-dessus est appelé *développement du réel x en fraction continue* (on pourra abréger cette expression et parler simplement du développement du réel x.)

On notera bien que ce développement peut être *fini* ou *infini*.

On pose $r_n = [\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n \,]$. On dit que r_n est la n-ième *réduite* du réel x.

On dit également que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les *quotients partiels* successifs de ce développement.

On définit les suites (p_n) et (q_n) comme indiqué dans les égalités (5).

Il est clair que p_n, q_n, r_n sont définis $\Leftrightarrow$ a_n existe. D'après (6), on a toujours $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

1. On va montrer que le développement de x est fini si et seulement si x est rationnel.
   (a) Montrer que si le développement de x est fini, alors x est rationnel.
   (b) Réciproquement, on suppose que $x = \dfrac{m}{d}$, où m est dans $\mathbb{Z}$, d dans $\mathbb{N}^*$.
   Montrer que le développement de x est fini et que les entiers a_k sont les quotients successifs dans l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (m, d).
2. Dans cette question, on calcule les développements de deux nombres rationnels.
   (a) Calculer les réduites r_n et les quotients partiels a_n du développement de $x = \frac{256}{117}$.
   (b) On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall\, n \geqslant 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
   Calculer les quotients partiels a_n dans le développement de $x = \dfrac{F_{15}}{F_{14}}$.
3. Dans cette question, on établit quelques résultats portant sur la qualité de l'approximation d'un réel x par ses réduites successives. Ces résultats supposent bien sûr l'existence des coefficients a_n, x_n, p_n, q_n, r_n invoqués (ce qui ne pose pas de problème si x est irrationnel car son développement est alors infini.)
   (a) En utilisant I.3.b montrer que $x - r_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}$.
   En déduire que si x est irrationnel : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = x$.
   (b) Avec $n \geqslant 3$ et en utilisant à nouveau I.3.b, montrer que $|x - r_n| < |x - r_{n-1}|$.
   (c) En utilisant $a_{n+1} \leqslant x_{n+1} < a_{n+1} + 1$ montrer que $\dfrac{1}{q_{n+1}q_{n+2}} < \left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$.
   En déduire à nouveau l'inégalité $|x - r_{n+1}| < |x - r_n|$.
   (d) Dans cette question, on va montrer le résultat suivant, qui prouve que chaque réduite r_n de x est la meilleure approximation de x parmi tous les nombres rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à q_n.
   Proposition : *Soit $r = \dfrac{m}{d}$ un rationnel tel que $1 \leqslant d \leqslant q_n$. Alors* $\left|x - \dfrac{m}{d}\right| \geqslant \left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right|$.
   - Montrer que r ne peut pas être strictement compris entre r_n et r_{n-1}.
   - Conclure.

Partie IV

Dans toute la suite, (a_n) est une suite d'entiers, avec $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geqslant 2,\ a_n \in \mathbb{N}^*$.

On conserve les notations de la partie II (suites (p_n), (q_n), (r_n)).

S'il n'y a aucune ambiguité sur la suite (a_n), on notera par exemple $[\ a_1,\ a_2,\ a_3, a_4,\ \ldots\ ]$ pour désigner la limite de $r_n = [\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n\ ]$ quand $n \to +\infty$.

Par exemple $x = [\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ ]$ est l'irrationnel de restes partiels $a_n = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Si les restes partiels a_k de $x = [\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ a_{p+1}, \ldots,\ a_{p+T},\ a_{p+1}, \ldots, a_{p+T},\ \ldots\ ]$ forment une suite périodique à partir d'un certain rang (sur cet exemple à partir du rang $p+1$, avec une période T) on notera $x = [\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \overline{a_{p+1},\ a_{p+2}, \ldots,\ a_{p+T}}\ ]$.

Par exemple $[\ 1,\ 4,\ \overline{3,\ 2,\ 5}\ ]$ désigne le développement illimité $[\ 1,\ 4,\ 3,\ 2,\ 5,\ 3,\ 2,\ 5,\ 3,\ 2,\ 5, \ldots\ ]$

1. Dans cette question on calcule le début du développement de π et de e, avec la précision permise par une calculatrice.
   (a) Avec $\pi \approx 3,14159265359$ trouver les six premières réduites de π.
   (b) Calculer les six premières réduites de $\mathrm{e} \approx 2,71828182846$

2. On vérifie ici quelques propriétés des développements en fraction continue illimitée.
   (a) Montrer que $[\ a_1,\ a_2,\ a_3, a_4,\ \ldots\ ] = a_1 + \dfrac{1}{[\ a_2,\ a_3, a_4,\ a_5,\ \ldots\ ]}$
   (b) Soit $x = [\ a_1,\ a_2,\ a_3, a_4,\ \ldots\ ]$ le développement en fraction continue d'un irrationnel, comme obtenu dans la partie III.
   Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers, avec $b_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
   On suppose que $[\ b_1,\ b_2,\ b_3, b_4,\ \ldots\ ] = x$ (au sens de la partie II).
   Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $b_n = a_n$ (ce résultat signifie que tout irrationnel possède un *unique* développement en fraction continue illimitée.)
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, prouver l'égalité :
   $$[\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots\ ] = \frac{[\ a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ ]p_n + p_{n-1}}{[\ a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ ]q_n + q_{n-1}}$$

3. Dans cette question, on calcule certains développements périodiques simples.
   (a) Calculer le développement du nombre d'or $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Calculer le développement de $\sqrt{2}$.
   (c) Montrer que $\sqrt{7} = [\ 2,\ \overline{1,\ 1,\ 1,\ 4}\ ]$.

4. Pour tout m de $\mathbb{N}^*$, montrer qu'on a les développements suivants :
   (a) $[\ m,\ \overline{2m}\ ] = \sqrt{m^2+1}$
   (b) $[\ m,\ \overline{m,\ 2m}\ ] = \sqrt{m^2+2}$
   (c) $[\ m,\ \overline{2,\ 2m}\ ] = \sqrt{m^2+m}$

Partie V

Les exemples précédents ont montré quelques développements périodiques.

On va maintenant considérer les irrationnels dont le développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang. On dit qu'un irrationnel x est *quadratique* s'il peut s'écrire $x = r + s\sqrt{\delta}$, où r et s sont rationnels et où δ est un entier > 0.

1. Montrer qu'un irrationnel x est quadratique si et seulement s'il est solution d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^2$.
2. Soit x un irrationnel. On suppose que le développement de x est périodique.

   Autrement dit, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que :

   $$x = [\, a_1,\, a_2,\, \ldots, a_n,\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n,\, a_1,\, \ldots\,] = [\, \overline{a_1,\, a_2,\, \ldots, a_n}\,]$$

   Montrer que x est quadratique.
3. Montrer que le résultat précédent est encore vrai si le développement de x est périodique *à partir d'un certain rang* c'est-à-dire si x s'écrit :

   $$x = [\, a_1,\, \ldots, a_n,\, a_{n+1},\, \ldots,\, a_{n+T},\, a_{n+1},\, \ldots\,] = [\, a_1,\, \ldots, a_n,\, \overline{a_{n+1},\, \ldots, a_{n+T}}\,]$$
4. Calculer $x = [\, 3,\, 2,\, \overline{3,\, 5,\, 1}\,]$.
5. On démontre (ce sera pour une prochaine fois...) la réciproque du résultat obtenu dans les questions V.2 et V.3 : un irrationnel est donc quadratique *si et seulement si* son développement en fraction continue est périodique au moins à partir d'un certain rang. Cette caractérisation est un théorème de Lagrange (1798).