Équations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E, on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E.

1. Soit A une partie de E.
   On cherche à caractériser les solutions (X, Y) de l'équation $X \cap Y = A$.
   (a) Soit A une partie de E. Montrer que pour tout couple (R, S) de parties de E, les ensembles $\begin{cases} X = A \cup (R \cap \bar{S}) \\ Y = A \cup (\bar{R} \cap S) \end{cases}$ vérifient $X \cap Y = A$.
   (b) Montrer que, réciproquement, toute solution (X, Y) de $X \cap Y = A$ est de la forme ci-dessus pour, au moins, un couple (R, S) de parties de E.
   (c) Conclure.
2. Etudier de même l'équation $X \cup Y = A$.
   On donnera deux démonstrations pour cette question :
   (a) Une méthode analogue à la précédente, avec $\begin{cases} X = A \cap (R \cup \bar{S}) \\ Y = A \cap (\bar{R} \cup S) \end{cases}$
   (b) Une méthode qui utilise le *résultat* de la question précédente.
3. Dans cette question, on désire étudier l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = C$, où A, B, C sont des parties données de E, X étant une partie inconnue de E.
   (a) On suppose que X_0 est solution de cette équation.
      i. Montrer que $A \cap B \subset C$ et $C \subset A \cup B$.
      ii. Montrer que $(\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup \big[X_0 \cap \big((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\big)\big] = X_0$.
   (b) On suppose que $A \cap B \subset C \subset A \cup B$.
      D étant une partie de E, on pose : $X = (\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup \big[D \cap ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))\big]$.
      Démontrer que :
      i. $A \cap X = C \cap \big[\bar{B} \cup (D \cap A \cap B)\big]$.
      ii. $\bar{B} \cup X = \bar{B} \cup (B \cap \bar{C}) \cup (D \cap A \cap B)$.
      iii. $B \cap \bar{X} = C \cap \big[\bar{A} \cup (\bar{D} \cap B)\big]$.
   (c) En déduire $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X})$.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur A,B,C, pour que l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = C$ ait au moins une solution.
   (e) Donner alors la forme générale de la solution.