Dérivations d'un anneau

Soit $(A, +, .)$ un anneau (qui n'est pas supposé commutatif).

On note 1 le neutre multiplicatif, et 0 le neutre additif.

Une application $\delta : A \to A$ est appelée une *dérivation* si :

$$\forall\, a, b \in A, \quad \begin{cases} \delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) & (H_1) \\ \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) & (H_2) \end{cases}$$

Première partie

Soit δ une dérivation de A.

1. Montrer que $\delta(0) = \delta(1) = 0$.
2. Si a est inversible dans A, montrer que $\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)a^{-1}$.
3. Soit $D_\delta = \{a \in A,\ \delta(a) = 0\}$.
   (a) Montrer que D_δ est un sous-anneau de A.
   (b) Montrer que si A est un corps, alors D_δ est un sous-corps de A.
4. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de A, avec $n \geqslant 2$.
   Calculer $\delta(a_1 a_2 \cdots a_n)$ en fonction des a_k et des $\delta(a_k)$.
5. En déduire $\delta(a^n)$ pour tout a de A et tout $n \geqslant 2$.
   Que devient cette formule si A est commutatif ?
6. On pose $\delta^0 = \mathrm{Id}_A$, $\delta^1 = \delta$, et $\forall\, n \geq 1$, $\delta^n = \delta \circ \delta^{n-1}$.
   Montrer par récurrence que : $\forall\, a, b \in A,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \delta^n(ab) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \delta^p(a)\, \delta^{n-p}(b)$

Deuxième partie

Dans cette partie, δ_1, δ_2, δ_3 désignent des dérivations quelconques de A.

1. $\delta_1 + \delta_2$ et $\delta_1 \circ \delta_2$ sont-elles des dérivations de A ?
2. On note $[\delta_1,\, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$.
   Montrer que $[\delta_1,\, \delta_2]$ est une dérivation de A.
3. Montrer que : $[\delta_1, [\delta_2,\, \delta_3]] + [\delta_2, [\delta_3,\, \delta_1]] + [\delta_3, [\delta_1,\, \delta_2]] = 0_A$ (application nulle de A).

Troisième partie

Pour tout $a \in A$, on note : $\forall\, x \in A$, $d_a(x) = ax - xa$.

1. Montrer que d_a est une dérivation de A.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, a \in A,\ d_a^n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p}\, x\, a^p$.
3. En déduire que si a est nilpotent, alors il existe un entier m tel que $d_a^m = 0_A$.
4. Vérifier les égalités, pour tous a, b de A :
   (a) Pour toute dérivation δ de A : $[\delta, d_a] = d_{\delta(a)}$.
   (b) En posant $[b, a] = ba - ab$, alors $[d_b, d_a] = d_{[b,a]}$.