Étude de la deltoïde

On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure canonique de plan vectoriel euclidien orienté.

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique (orthonormée directe) $\begin{cases} e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{cases}$

On identifiera un point M au couple (x, y) de ses coordonnées dans $\mathcal{B}_0$, ou à son affixe $z = x + iy$.

Pour tout réel t, on pose $u(t) = (\cos t, \sin t)$ et $v(t) = (-\sin t, \cos t)$.

On se donne un réel strictement positif a, et on définit :

— le cercle Γ de centre O, de rayon $3a$, et le point $A = (3a, 0)$.

— le cercle $\mathcal{C}$, de rayon a, tangent intérieurement à Γ en A.

Pour tout nombre réel t, on définit également :

— les points $B(t) = (2a\cos t, 2a\sin t)$ et $A(t) = (3a\cos t, 3a\sin t)$.

— le cercle $\mathcal{C}(t)$, de rayon a, de centre $B(t)$, donc tangent intérieurement à Γ en $A(t)$.

Le cercle $\mathcal{C}$ roule sans glisser à l'intérieur du cercle fixe Γ, et on s'intéresse à la trajectoire du point lié au cercle mobile et qui se trouve initialement (c'est-à-dire au temps $t = 0$) au point A. On note $M(t)$ la position de ce point à l'instant t (c'est-à-dire quand le cercle mobile coïncide avec $\mathcal{C}(t)$).

1. (a) Tracer soigneusement une figure décrivant la situation à un instant t compris entre 0 et $\pi/2$.
   (b) Montrer que $M(t) = \begin{cases} x(t) = a(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ donc que son affixe est $z(t) = a(2\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-2it})$.
   (c) Comparer $z\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $z(t)$, et en déduire comment $M\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ se déduit de $M(t)$.
   (d) Indiquer la réduction maximale de l'intervalle d'étude de l'arc $\Delta : t \mapsto M(t)$.

2. (a) Vérifier que $\overrightarrow{OM}'(t) = -4a\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)\overrightarrow{u}\left(-\dfrac{t}{2}\right)$. Calculer de même $\overrightarrow{OM}''(t)$.
   (b) Déterminer la longueur totale de l'arc Δ.
   (c) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}\left(-\dfrac{t}{2}\right)$ dirige *toujours* la tangente à l'arc en $M(t)$ à Δ.
   (d) Montrer que l'équation de la tangente en $M(t)$ à Δ est : $X\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) + Y\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) = a\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)$
   (e) Montrer que la tangente en $M(t)$ à Δ recoupe Δ en deux points distants l'un de l'autre de $4a$.

3. L'arc $\Delta : t \mapsto M(t)$ est orienté dans le sens des t croissants, et on suppose $0 < t < \dfrac{2\pi}{3}$.
   (a) Déterminer la base de Frenet $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ au point $M(t)$.
   (b) Préciser la valeur le rayon de courbure $R(t)$ à Δ en $M(t)$ (deux méthodes différentes).

4. (a) Déterminer le centre de courbure $\Omega(t)$ en $M(t)$.
   Si $M(t)$ est stationnaire sur Δ, on convient que $R(t) = 0$, donc $\Omega(t) = M(t)$.
   On note Δ' la *développée* de Δ, c'est-à-dire l'ensemble des centres de courbure $\Omega(t)$.
   (b) Vérifier que $\overrightarrow{O\Omega(t)} = -3\,\overrightarrow{OM(t+\pi)}$. Interpréter ce résultat.
   Tracer Δ et Δ'