Problème : cycles et nombres de Stirling de première espèce

Notations et définitions

– Dans tout le problème, n désigne un entier naturel, avec $n \geqslant 2$, et on note $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

– Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des bijections de E_n sur lui-même.

Pour désigner un élément f de $\mathcal{B}_n$, on utilisera le tableau $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n-1) & f(n) \end{pmatrix}$, où les entiers $1, 2, \ldots, n$ figurent chacun une fois et une seule sur la deuxième ligne.

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la bijection $f : E_5 \to E_5$ (c-à-d l'élément f de $\mathcal{B}_5$) définie par $f(1) = 3,\ f(2) = 4,\ f(3) = 5,\ f(4) = 2$ et $f(5) = 1$.

– Pour tout f de $\mathcal{B}_n$, on définit les *puissances itérées* de f par $\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id} \\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f \circ f^k \end{cases}$

Ainsi $f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f \circ f$, etc.

On définit également les puissances négatives de f par : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ f^{-p} = (f^{-1})^p = (f^p)^{-1}$.

Par exemple f^{-3} est à la fois la bijection inverse de f^3 et la puissance troisième de f^{-1}.

Il est facile de voir qu'avec de telles définitions, on a les égalités $f^m \circ f^p = f^p \circ f^m = f^{m+p}$ pour tous entiers relatifs m et p, mais on ne demande pas de le vérifier.

– Venons-en maintenant à la définition d'une classe particulière de bijections de E_n dans lui-même.

On dit qu'une application $f : E_n \to E_n$ est un *cycle* si :

◇ Il existe un entier p tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.

◇ Il existe un arrangement $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ de p éléments distincts de E_n.

◇ On a les égalités $f(a_0) = a_1,\ f(a_1) = a_2,\ \ldots,\ f(a_{p-2}) = a_{p-1}$ et $f(a_{p-1}) = a_0$.

◇ Pour tout x de $E_n \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\}$, on a $f(x) = x$.

Pour résumer cette situation, on notera $f = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$.
On dit alors que f est un cycle de *longueur* p et de *support* l'ensemble $\mathcal{S}_f = \{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\}$.

On notera bien les points suivants, que l'on ne demande pas de justifier :

◇ Quand on parle du support $\mathcal{S}_f = \{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\}$ de f, l'ordre des éléments n'a pas d'importance.

En revanche il a une très grande importance dans la notation $f = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$.

◇ Si $f = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$, alors $f(a_k) = a_{k+1}$ pour tout k de $\{0, \ldots, p-2\}$, mais aussi si $k = p-1$ en notant les indices modulo p, c'est-à-dire en considérant que a_p désigne a_0.

◇ Il n'y a pas unicité de l'écriture de l'application f sous la forme $f = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$.

En effet, elle s'écrit aussi $f = (a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_0)$, ou encore $f = (a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}, a_0, a_1)$, ou plus généralement $f = (a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+p-1})$ pour tout entier k compris entre 0 et $p-1$ (toujours en considérant que les indices sont calculés modulo p).

◇ La restriction de f à $\mathcal{S}_f$ est une bijection de $\mathcal{S}_f$ sur lui-même.

◇ Les éléments x du support $\mathcal{S}_f$ de f vérifient tous $f(x) \neq x$, alors que les éléments x de $E_n \setminus \mathcal{S}_f$ sont invariants (fixes) par f c'est-à-dire vérifient $f(x) = x$.

I. Généralités sur les cycles de $\{1, 2, \ldots, n\}$

1. Dans cette question uniquement, $n = 9$.
   (a) Montrer que $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ est un cycle de E_9, dont on précisera la longueur p et le support, et qu'on écrira sous la forme $f = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$.
   (b) Préciser les applications f^{-1}, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6 et f^{2005}. Pour chacune d'elles, préciser rapidement s'il s'agit d'un cycle et en indiquer la longueur et le support éventuels.
   (c) Reprendre les deux questions précédentes avec $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 9 & 6 & 5 & 1 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.
   (d) On pose $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 1 & 9 & 2 & 7 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que f n'est pas un cycle mais qu'elle s'écrit comme le produit $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ de trois cycles à supports disjoints deux à deux. On indiquera brièvement pourquoi ces trois cycles commutent deux à deux (c'est-à-dire pourquoi on a les égalités $\sigma_j \circ \sigma_k$ pour $j \neq k$).

2. À partir de cette question, n est à nouveau un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.
   Soit $f = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ un cycle de longueur p (naturellement, $p \geqslant 2$).
   (a) Montrer que les applications f^k, avec k dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, sont distinctes deux à deux.
   (b) Préciser f^p, et montrer que la suite $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$, est p-périodique ($\forall\, k \in \mathbb{Z},\ f^{k+p} = f^k$).
   (c) Montrer que pour tout x de $\mathcal{S}_f$, on a $\mathcal{S}_f = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}$.

3. Soient σ_1 et σ_2 deux cycles de E_n, de supports respectifs $\mathcal{S}_1$ et S_2.
   (a) On suppose que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont disjoints. Montrer que $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$.
   (b) Réciproquement, on suppose que σ_1 et σ_2 commutent : $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$.
   On va montrer que leurs supports sont ou bien confondus, ou bien disjoints.
   Pour cela, on suppose que $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$ et on doit donc prouver $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$.
   On suppose par exemple que x est un élément de $\mathcal{S}_1$ mais pas de $\mathcal{S}_2$.
      i. Pour tout k de $\mathbb{N}$, vérifier que $\sigma_1^k \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1^k$.
      ii. Pour tout k de $\mathbb{N}$, montrer que $\sigma_1^k(x)$ est invariant par σ_2.
      iii. En déduire que les supports $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont disjoints.
   (c) Montrer par un contre-exemple (avec $n = 4$) que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ n'implique pas $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

II. Orbites et décomposition en produits en cycles

Soit f un élément quelconque de $\mathcal{B}_n$, c'est-à-dire une bijection de E_n dans lui-même.

Pour tous éléments x, y de E_n, on dit que y *est relié à x par l'application* f, et on note $y\,\mathcal{R}_f\,x$, s'il existe un entier relatif p (dépendant vraisemblablement de x et de y) tel que $y = f^p(x)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E_n.
   Les classes d'équivalence pour cette relation seront appelées *orbites* de E_n pour l'application f.

2. (a) A quelle condition une orbite de E_n pour l'application f peut-elle se réduire à un singleton ?
   (b) Décrire les orbites de E_n pour l'application identité.
   (c) Soit $f = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ un cycle de longueur p, avec $2 \leqslant p \leqslant n$.
   Décrire les orbites de E_n pour l'application f.

3. Soit f un élément de $\mathcal{B}_n$. Soit $A \subset E_n$ une orbite de E_n pour f, non réduite à un singleton.
   (a) Soit x un élément de A. Montrer que $A = \{f^k(x),\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   (b) Montrer qu'il existe un plus petit entier $p \geqslant 2$ tel que $f^p(x) = x$.
   (c) Prouver alors que $\operatorname{card} A = p$, et que $A = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}$.
   (d) Soit σ l'application de E_n dans lui-même définie par les égalités $\begin{cases} \sigma(y) = f(y) & \text{si } y \in A \\ \sigma(y) = y & \text{si } y \notin A \end{cases}$
   Montrer que σ est un cycle de longueur p, de support A.

4. Soit f une bijection de E_n dans lui-même, distincte de l'identité.
   Soit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ les différentes orbites de E_n pour f non réduites à un singleton.
   Pour tout k de $\{1, \ldots, m\}$, soit $\sigma_k : E_n \to E_n$ définie par les égalités $\begin{cases} \sigma_k(y) = f(y) & \text{si } y \in A_k \\ \sigma_k(y) = y & \text{si } y \notin A_k \end{cases}$
   Montrer qu'on peut écrire $f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_m$, et qu'on obtient ainsi une décomposition de l'application f en produits de cycles à supports disjoints deux à deux, donc de cycles qui commutent deux à deux, d'après la question (I.3.a).

5. Dans cette question, $n = 15$ et $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 8 & 6 & 15 & 4 & 14 & 13 & 7 & 3 & 9 & 12 & 1 & 5 & 2 & 10 & 11 \end{pmatrix}$.
   (a) Ecrire, dans ce cas particulier, la décomposition de f telle qu'étudiée en (II.4).
   (b) Montrer que $f^{60} = \mathrm{Id}$, et calculer f^{2005}.

6. Après cet exemple, on revient au cas général.
   On va montrer que la décomposition de f obtenue en (II.4) est unique à l'ordre près des facteurs.
   Pour cela, on suppose que $f = u_1 \circ u_2 \ldots \circ u_q = v_1 \circ v_2 \ldots \circ v_r$ (avec q, r dans $\mathbb{N}^*$, les u_i étant des cycles de E_n à supports disjoints deux à deux, et les v_j étant eux aussi des cycles de E_n à supports disjoints deux à deux.)
   (a) Soit x un élément du support de u_1.
   Montrer qu'il existe un indice j de $\{1, \ldots, r\}$ tel que x soit dans le support de v_j.
   (b) Montrer alors que u_1 et v_j ont le même support (utiliser I.2.c).
   (c) En déduire que les applications u_1 et v_j sont identiques.
   (d) Conclure à l'unicité de la décomposition de f en produit de cycles à supports disjoints deux à deux (à l'ordre près des facteurs bien sûr).

III. Nombres de Stirling de première espèce

On définit les *nombres de Stirling de première espèce* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ comme suit, pour $0 \leqslant k \leqslant n$ dans $\mathbb{N}^2$:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ si } n \geqslant 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \text{ si } n \geqslant 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

1. (a) Montrer que les relations précédentes définissent bien les coefficients $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
   (b) Former un tableau donnant les $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ pour $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant n \leqslant 5 \end{cases}$, à la manière du triangle de Pascal.
   Pour vérification : $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 35$.
   (c) Montrer les égalités suivantes :
   $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \text{ si } n \geqslant 1\,; \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \text{ si } n \geqslant 1\,; \quad \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \text{ si } n \geqslant 2\,;$

2. Pour tout x, on pose $P_0(x) = Q_0(x) = 1$ et (pour $n \geqslant 1$) $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$ et $Q_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.
   (a) Constater que $P_5(x) = \sum_{k=0}^{5} \begin{bmatrix}5\\k\end{bmatrix} x^k$ en réutilisant les résultats de (III.1.b).
   (b) De la même manière, vérifier que : $Q_5(x) = -\sum_{k=0}^{5}(-1)^k \begin{bmatrix}5\\k\end{bmatrix} x^k$
   (c) Plus généralement prouver $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} x^k$ et $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} x^k$ pour tout n.
3. Cette question établit le lien avec les parties II et III. Pour $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, notons $S(n,k)$ le nombre des bijections $f : E_n \to E_n$ définissant exactement k orbites dans E_n.
   (a) Vérifier que $S(4,2) = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 11$ en donnant la liste de toutes les bijections $f : E_4 \to E_4$ définissant exactement deux orbites dans E_4.
   (b) Montrer plus généralement que $S(n,k) = \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $n \geqslant 1$.
4. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ de deux manières différentes.