Quelques propriétés de la cardioïde

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure habituelle de plan euclidien orienté.

Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif.

On appelle *cardioïde* la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ dont une équation en polaires est $\rho = a(1+\cos\theta)$.

1. Étudier et tracer la courbe Γ. On précisera l'angle polaire (dans le repère canonique) de la tangente au point de paramètre θ de Γ. On indiquera en particulier quels sont les points à tangente horizontale ou verticale.
2. (a) Montrer que pour tout réel φ, il y a exactement trois points M, N, P de Γ en lesquels la tangente à Γ a pour angle polaire φ.

   (b) Déterminer le centre de gravité du triangle MNP.

   (c) Déterminer l'aire du triangle MNP.

   (d) Quand le point M décrit Γ, reconnaître la courbe décrite par le milieu I du segment NP (comment cette courbe se déduit-elle de Γ ?)
3. Déterminer une représentation en polaires de la courbe Γ' décrite par la projection orthogonale $N(\theta)$ de O sur la tangente à Γ en $M(\theta)$. Construire Γ'.
4. Une droite variable Δ, passant par O, rencontre Γ en deux points P et Q autres que O. On note A le point de coordonnées $(2a, 0)$.

   (a) Déterminer le lieu du barycentre J du triangle APQ.

   (b) Déterminer le lieu du point d'intersection I des tangentes en P et Q à Γ.
5. Soit (C) un cercle fixe de rayon $a > 0$. Un cercle mobile (C') de même rayon roule sans glisser sur (C). Montrer que la trajectoire d'un point M de (C') est une cardioïde.
6. On note $A(\theta)$ le point d'angle polaire θ d'un cercle de centre 0.
   On considère la droite D_θ passant par les points $A(\theta)$ et $A(2\theta)$.
   Montrer que quand θ varie, D_θ reste tangente à une cardioïde que l'on déterminera.

Deuxième partie

1. Déterminer le centre de courbure au point de paramètre $\theta = 0$ de Γ.
2. On oriente Γ dans le sens des θ croissants.

   (a) Déterminer une abscisse curviligne sur Γ, avec $(0, 0)$ comme origine.
   Quelle est la longueur totale de la courbe Γ ?

   (b) Préciser le repère de Frenet et la courbure au point de paramètre θ.

   (c) Montrer que l'ensemble des centres de courbure de Γ est une cardioïde, dont on indiquera par quelle transformation géométrique simple elle se déduit de Γ.

Troisième partie

1. Soit $\mathcal{D}$ le domaine du plan intérieur à la cardioïde Γ.

   On suppose que $\mathcal{D}$ est recouvert d'une densité surfacique constante $\mu > 0$.

   On note $\mathcal{D}^+$ l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le demi-plan $y \geqslant 0$.

   (a) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

   (b) Calculer le centre d'inertie de $\mathcal{D}$ et celui de $\mathcal{D}^+$.

   (c) Calculer les moments d'inertie de $\mathcal{D}$ par rapport à Ox, à Oy, à O.

   (d) Calculer le volume qu'engendrerait $\mathcal{D}$ par rotation autour de Ox.

2. On suppose que Γ est recouvert d'une densité linéique constante $\mu > 0$.

   On note Γ^+ l'intersection de Γ avec le demi-plan $y \geqslant 0$.

   (a) Calculer le centre d'inertie de Γ et celui de Γ^+.

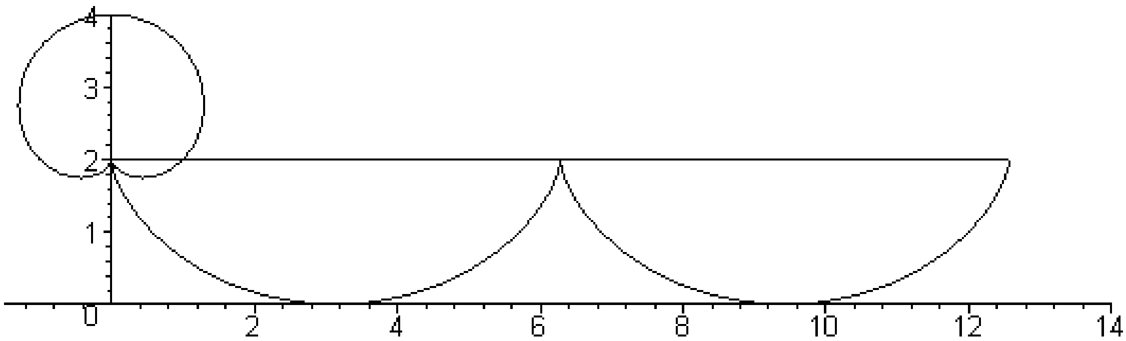
   (b) Calculer les moments d'inertie de Γ par rapport à Ox, à Oy, à O.

   (c) Calculer l'aire de la nappe qu'engendrerait Γ^+ par rotation autour de Ox.

3. On considère la cycloïde, d'équation $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 + \cos(t) \end{cases}$, pour t réel.

   Chaque arche de cette cycloïde a pour longueur 8.

   Sur le point $(0, 2)$ de la cycloïde, on "pose" une cardioïde de longueur 8, comme indiqué :



   On fait ensuite rouler la cardioïde sur la cycloïde, sans glisser. Montrer que, pendant ce mouvement, le point de rebroussement de la cardioïde décrit la droite $y = 2$.