Théorème de Cantor-Bernstein

Théorème (Cantor-Bernstein) : *Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E. Alors il existe une bijection h de E sur F*

On note $\varphi = g \circ f$: cette application est donc injective de E dans lui-même.

Soit $\overline{g(F)}$ le complémentaire de $g(F)$ dans E, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui ne sont l'image par g d'aucun élément de F. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les parties X de E qui contienent à la fois $\overline{g(F)}$ et $\varphi(X)$. Bien entendu E lui-même est un élément de $\mathcal{E}$.

1. On note K l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{E}$. Montrer que K est un élément de $\mathcal{E}$.

   Indication : par définition, l'ensemble K est inclus dans tous les éléments X de $\mathcal{E}$.

2. Soit $\widehat{K} = \overline{g(F)} \cup \varphi(K)$: le résultat de la question précédente s'écrit donc $\widehat{K} \subset K$.

   Montrer que $\overline{g(F)} \cup \varphi(\widehat{K}) \subset \widehat{K}$. En déduire que $\widehat{K}$ est élément de $\mathcal{E}$, et que $\widehat{K} = K$.

3. Montrer que $\overset{-1}{g}(K)$ (l'image réciproque de K par g) est égale à $f(K)$.

   Indication : g étant injective, on sait que $\overset{-1}{g}(g(Y)) = Y$ pour toute partie Y de F.

4. Pour tout x de K, on pose $h(x) = f(x)$.

   Pour tout x de $\overline{K}$, $h(x)$ désigne l'unique antécédent de x par g (justifier son existence.)

   On définit ainsi une application h de E dans F. Montrer que h est bijective.

   (Indication : on prouvera successivement la surjectivité et l'injectivité de h, en discutant suivant la position dans E ou dans F, des éléments concernés.)

5. Conclusion ?