

## Une équation fonctionnelle

On cherche les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ayant en 0 une dérivée  $f'(0) = a > 0$ , et telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (avec } xy + 1 \neq 0) : f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad (1)$$

Dans les questions 1 à 10, on suppose l'existence d'une solution  $f$  à ce problème.

1. Montrer que  $f(-1) = f(1) = 0$  et  $f(0) = 1$ .
2. Montrer que  $f$  ne s'annule qu'aux points  $-1$  et  $1$ .
3. Montrer que :  $\forall t \in ]-1, 1[ f(t) > 0$ .
4. Soit  $x_1$  un réel distinct de  $-1, 0$ , et  $1$ . Soit  $M(x_1) = \left| x_1 - \frac{1}{x_1} \right| > 0$ .
  - (a) Montrer que si  $|h| < M(x_1)$ , alors l'équation  $\frac{x_1 + y}{1 + x_1 y} = x_1 + h$  (où  $y$  est l'inconnue) admet une solution  $y_h$ .
  - (b) En déduire que  $f$  est dérivable en  $x_1$  et que  $f'(x_1) = \frac{a f(x_1)}{1 - x_1^2}$ .
5. Montrer que,  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{a/2}$ .
6. Montrer que  $f$  a un signe constant sur  $]1, +\infty[$ , et un signe constant sur  $] -\infty, -1[$ .
7. Montrer que  $f$  garde un signe constant  $\varepsilon$  sur  $] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .
8. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  tels que  $xy \neq -1$  :
  - (a)  $(|x| < 1 \text{ et } |y| < 1) \text{ ou } (|x| > 1 \text{ et } |y| > 1) \Rightarrow \left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1$ .
  - (b)  $(|x| < 1 \text{ et } |y| > 1) \text{ ou } (|x| > 1 \text{ et } |y| < 1) \Rightarrow \left| \frac{x+y}{1+xy} \right| > 1$ .
9. En déduire que l'application  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} \forall x \in [-1, 1], g(x) = f(x) \\ \forall x \notin [-1, 1], g(x) = -f(x) \end{cases}$  est encore une solution du problème (ce qui prouve que  $\varepsilon$  peut être choisi arbitrairement).
10. On suppose que " $\varepsilon = +$ ". Montrer que :  $\forall x \neq 1, f(x) = \left| \frac{1+x}{1-x} \right|^{a/2}$ .
11. Réciproquement, montrer qu'une telle application (en posant en outre  $f(1) = 0$ ), est bien une solution du problème.
12. Donner toutes les solutions du problème.
13. En se limitant à " $\varepsilon = +$ ", tracer les courbes représentatives correspondant à chacun des cas possibles (trois courbes).