Recherche d'extremum

On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g_n(x) = x(x-1)\cdots(x-n)a^{-x}$$

L'objet du problème est d'étudier le maximum de la fonction g_n sur l'intervalle $[n, +\infty[$.

Première partie

Dans cette partie, on examine le cas particulier où $n = 1$.

1. (a) Etudier les variations de la fonction $\dfrac{g_1'}{g_1}$.
   On notera u et v les valeurs de x où cette fonction s'annule, avec $u < v$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g_1. Etudier la branche infinie du graphe de g_1.
2. Dans cette question, on prend $a = 2$.
   (a) Calculer les valeurs approchées à 10^{-5} près de $u, v, g_1(u), g_1(v)$.
   (b) Construire le graphe de g_1 (unités : $2,5$ cm sur Ox et 10 cm sur Oy).

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On désigne par M le maximum de $|f''(x)|$ sur $[-1, 1]$. Soit β un élément de $\mathbb{R}^+$.

On se propose d'approcher l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ par la somme $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big)$.

On suppose que $n \geqslant \beta$. Pour tout nombre entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose :

$$R_1(k,n) = f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big) - \frac{\beta}{n} f'\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

$$R_2(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2n^2} f'\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

1. (a) En utilisant Taylor-Lagrange montrer que $|R_1(k,n)| \leqslant \frac{A}{n^2}$, avec $A = \frac{\beta^2 M}{2}$.
   (b) Montrer également que $|R_2(k,n)| \leqslant \frac{B}{n^3}$, avec $B = \frac{M}{6}$.
2. (a) On pose $R_3(k,n) = \displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big) - \frac{\beta - 1/2}{n}\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\Big)$.
   Prouver l'inégalité $|R_3(k,n)| \leqslant \frac{C}{n^3}$ où $C = A + B + \frac{M}{2}\Big|\beta - \frac{1}{2}\Big|$.
   (b) On pose $\Delta_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big) - \frac{\beta - 1/2}{n}(f(1) - f(0))$.
   Prouver que $|\Delta_n| \leqslant \frac{C}{n^2}$.

Troisième partie

On revient à l'étude de la fonction g_n dans le cas général.

1. Pour tout réel $x > n$, calculer $h_n(x) = \dfrac{g_n'(x)}{g_n(x)}$.

   Montrer que sur $]n, +\infty[$, la dérivée de g_n s'annule en un point x_n unique.

   Etudier le signe de $g_n'(x)$ sur $]n, +\infty[$. On pose $M_n = g_n(x_n)$.

2. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

   On considère la fonction f_α définie par $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha - x}$.

   (a) Déterminer en fonction de a la valeur de α pour laquelle on a :

   $$h_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

   Dans toute la suite, on pose $\alpha = \frac{a}{a-1}$.

   (b) Vérifier que $h_n(n\alpha + \beta) = \frac{1}{n\alpha+\beta} - \frac{\beta - 1/2}{n}(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)) - \Delta_n$,
   où Δ_n a été défini dans la question II-2 (avec ici $f = f_\alpha$.)

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, h_n(n\alpha + \beta) = \frac{\alpha - \beta - 1/2}{\alpha(\alpha - 1)}$.

3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $n\alpha \leqslant x_n \leqslant (n+1)\alpha$.

   A cet effet, on étudiera les signes de $h_n(n\alpha)$ et de $h_n((n+1)\alpha)$.

4. (a) On se propose de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, avec $y_n = \frac{1}{n} \ln \prod\limits_{k=0}^{n} \frac{x_n - k}{n}$.

   Pour celà, on utilisera l'encadrement précédent de x_n ; on utilisera le résultat de la question II-2-b avec $f(x) = \ln(\alpha - x)$, avec $\beta = 0$ puis $\beta = \alpha$.

   On en déduira que la limite cherchée est : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(\alpha - x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Calculer cette intégrale.

   (c) Montrer finalement que la suite de terme général $\frac{1}{n}\sqrt[n]{M_n}$ converge vers $\frac{1}{\mathrm{e}(a-1)}$.