Quatre études de fonctions

Exercice 1

On définit la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{|x(x+2)|}$.

1. Préciser le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de f.
2. Indiquer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

   Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = -2$ et au voisinage de $x = 0$.
3. Étudier le sens de variations de f, et dresser son tableau de variations.
4. Étudier l'existence d'une asymptote oblique quand $x \to -\infty$ ou quand $x \to +\infty$.

   Donner le placement de la courbe par rapport à cette asymptote.
5. Étudier la concavité de f et préciser les points d'inflexion.
6. Tracer soigneusement la courbe représentative de f.

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = |\tan x|^{\cos x}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?

   Montrer qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $]0, \pi[$.

   Pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que l'application f peut être prolongée par continuité en $x = 0$ et en $x = \frac{\pi}{2}$.
3. Étudier le sens de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et dresser son tableau de variations.

   On donnera une valeur approchée de l'abscisse x_0 pour laquelle $f'(x_0) = 0$.

   Procéder à une étude analogue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
4. Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = \frac{\pi}{2}$.
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f sur un intervalle contenant $[0, \pi]$.

Exercice 3

On considère l'application f définie par $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?

   Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$, de $x = 1$, et de $+\infty$.
4. Tracer soigneusement la courbe représentative de f.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $x > -1$ (et $x \neq 0$) : $\exists!\theta_x \in]0, 1[$ tel que $\ln(1 + x) = \dfrac{x}{1 + \theta_x x}$.
2. On définit l'application f par $f(x) = \theta_x$.

   Préciser la dérivabilité de f, et donner les limites de f aux bornes de son domaine.
3. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = -1$.
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f.