Intégrales de Futuna

Notations :

Soit f est une application continue sur $[x_0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On pose $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{x_0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, si cette limite existe dans $\mathbb{R}$.

Dans ce problème, il sera question d'intégrales de ce type, mais tous les calculs devront être effectués sur des intégrales sur un segment (le plus souvent $[0, a]$ avec $a > 0$) avant un passage à la limite (qui devra être justifié) quand a tend vers $+\infty$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $F_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n}$ (si cette intégrale existe).

Les intégrales F_n sont appelées *intégrales de Futuna*.

1. (a) Prouver que F_1 existe, et calculer sa valeur.

   (b) Prouver que F_2 existe, et calculer sa valeur.

   (c) Montrer que tous les F_n $(n \geqslant 1)$ existent et que $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. (a) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et convergente.

   (b) Dans cette question, on va prouver que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_n = 0$.

   On se donne $\varepsilon > 0$, puis a, b dans $\mathbb{R}+*$, avec $a < b$.

   On décompose F_n sous la forme $F_n = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n} + \int_b^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n}$.

   i. Montrer que $F_n \leqslant a + \dfrac{b}{(\operatorname{ch} a)^n} + \dfrac{(2\mathrm{e}^{-b})^n}{n}$.

   ii. Choisir a et b et en déduire : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant F_n \leqslant \varepsilon$. Conclure.

3. (a) Déduire de la question (1) l'expression de F_{2n} et de F_{2n+1} à l'aide de factorielles.

   (b) Montrer que la suite $n \mapsto u_n = nF_nF_{n+1}$ est constante et calculer sa valeur.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1$, et en déduire que $F_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x$ (ce sont les intégrales de Wallis).

   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $F_n = W_{n-1}$.

   Ce résultat explique l'analogie qu'on remarque entre les intégrales de Wallis et Futuna !

5. Appliquer la formule d'intégration approchée par la méthode du trapèze à $x \mapsto \ln x$ sur le segment $[n, n+1]$ et en déduire l'inégalité $0 \leqslant \left(n+\dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$.

6. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \ln\left(n^n\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-n}\right) - \ln(n!)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$.

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

   (b) On note $C = \displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.

   Montrer l'égalité $2u_n - u_{2n} = \ln\left(\dfrac{F_{2n+1}\sqrt{2n}}{\pi}\right)$ et en déduire $C = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

   (c) Prouver finalement la formule de Stirling : $n! \sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.