Une intégrale dépendant d'un paramètre

Dans ce problème, on étudie l'intégrale $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, où α est un réel.

Première partie

1. Montrer que l'application F est définie et positive sur $I = \,]\,1, +\infty\,[$.
2. Calculer $F(2)$, $F(3)$, $F(\frac{3}{2})$.
3. Pour tout α de I, montrer que $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
4. Montrer que l'application $\alpha \to F(\alpha)$ est convexe sur I.
   Indication : pour t fixé dans $]0,1]$, considérer l'application $h_t : \alpha \mapsto \dfrac{1+t^{\alpha-2}}{1+t^\alpha}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne deux entiers n et p strictement positifs, avec $p < 2n$.

Pour tout entier k de $\{1,\ldots,2n\}$, on note $\theta_k = \dfrac{2k-1}{2n}\,\pi$.

1. Pour tout réel θ de $]\,0,\pi\,[$, calculer les sommes suivantes :
   $C_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\theta$, $S_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta$ et $D_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)\sin(2k-1)\theta$.
2. Montrer que la fraction rationnelle $R(x) = \dfrac{p\,x^{p-1}}{x^{2n}+1}$ se décompose en $R(x) = \dfrac{p}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} R_k(x)$, avec $R_k(x) = \dfrac{a_k x + b_k}{x^2 - 2x\cos\theta_k + 1}$. Déterminer a_k, b_k et prouver l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$.
3. Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, soit S_k la primitive de R_k qui s'annule en 0. Montrer que :
   $S_k(x) = \dfrac{a_k}{2}\ln\Big(x^2 - 2x\cos\theta_k + 1\Big) + \sin(p\,\theta_k)\arctan\Big(\dfrac{x-\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\Big) + \Big(\dfrac{\pi}{2} - \theta_k\Big)\sin(p\,\theta_k)$.
4. Montrer que si $\alpha = \dfrac{2n}{p}$, alors $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire $F(\alpha) = \dfrac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$.
5. On suppose que α est quelconque dans I. Montrer que $F(\alpha) = \dfrac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$.