Quelques inégalités classiques

Exercice 1

Étant donnés n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positifs ou nuls, avec $n \geqslant 2$, on note :

$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (moyenne géométrique) et $M_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ (moyenne arithmétique)

On se propose de montrer l'inégalité $G \leqslant M$ par récurrence sur n.

1. Que se passe-t-il si l'un au moins des a_k est nul ?

   Dans toute la suite, on supposera donc que les a_k sont strictement positifs.
2. Montrer que la propriété est vraie au rang 2 et préciser le cas d'égalité.
3. Montrer que si la propriété est vraie au rang $n \geqslant 1$, alors elle est vraie au rang $2n$.

   Indication : noter M_1 et G_1 (resp. M_2 et G_2) les moyennes arithmétique et géométrique de $a_1, \ldots, a_n$ (resp. $a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$), et M, G celles de $a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_{2n}$.
4. Montrer que si la propriété est vraie au rang $n \geqslant 3$, alors elle est vraie au rang $n-1$.
5. Montrer que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
6. (Pour les plus motivé(e)s) Montrer que l'inégalité $G \leqslant M$ est une égalité si et seulement si tous les a_k sont égaux.

(L'idée de cette démonstration est attribuée à Leonhard Euler)

Exercice 2

Soient $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 2$.

On pose $X \cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, $\quad \|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2}$ et $\|Y\| = \sqrt{Y \cdot Y}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $|X \cdot Y| \leqslant \|X\|\,\|Y\|$ (égalité $\Leftrightarrow X, Y$ proportionnels.)

La méthode vue en cours utilise en général la positivité de $P(\lambda) = \|X + \lambda Y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k + \lambda y_k)^2$.

On va maintenant voir trois autres démonstrations de cette inégalité.

1. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz par récurrence simple.
2. On note $\mathcal{P}_n$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz au rang n. Vérifier $\mathcal{P}_2$.

   Montrer que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{2n}$ (pour $n \geqslant 2$) et que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$ (pour $n \geqslant 3$) et conclure.
3. Prouver l'égalité de Lagrange $\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 + (X \cdot Y)^2 = \|X\|^2 \ \|Y\|^2$ et conclure.

Exercice 3

Pour $X = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et p dans $\mathbb{R}^{+*}$, on note $\|X\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}$.

Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Soient a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$. Trouver le minimum sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $f : t \mapsto \dfrac{a^p}{p}\, t^{-1/q} + \dfrac{b^q}{q}\, t^{1/p}$.

   En déduire : $\forall\, (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \, \|Y\|_q$ (inégalité de Holder)

   Qu'obtient-on si $p = q = 2$?
2. Soient a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$. Trouver le minimum sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $g : t \mapsto a^p t^{1-p} + b^p (1-t)^{1-p}$.

   En déduire : $\forall\, (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p$ (inégalité de Minkowski)

Exercice 4

On se donne $a_1, \ldots, a_n$ et $p_1, \ldots, p_n$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, de telle sorte que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Prouver l'inégalité $a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leqslant p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots p_n a_n$.

(Indication : pour tout $x > 0$, on a $\ln x \leqslant x - 1$.)

Quel est le cas d'égalité ? Qu'obtient-on en posant $p_k = \dfrac{1}{n}$ pour tout k ?