Un peu de géométrie du triangle

Le plan euclidien orienté est identifié à $\mathbb{C}$. Par exemple, si a est un nombre complexe, et plutôt que d'évoquer le point A d'affixe a, on parlera simplement du point a.

On va prouver des propriétés géométriques du triangle, invariantes dans toute similitude. On ne perd donc aucune généralité à considérer un triangle T inscrit dans le cercle unité $\mathcal{U} = \{z,\ |z| = 1\}$, c'est-à-dire défini par trois points distincts a, b, c tels que $|a| = |b| = |c| = 1$.

Uniquement pour les figures on prendra $a = \exp(-\frac{11i\pi}{12})$, $b = \exp(-\frac{i\pi}{12})$, et $c = \exp(\frac{5i\pi}{8})$.

I. La droite d'Euler

1. On pose $s = a + b$ et $h = a + b + c$. Montrer que $0, s, h, c$ forment un parallélogramme.
   En déduire que les hauteurs du triangle T se coupent au point h.
2. Uniquement dans cette question, on suppose $a + b + c = 0$.
   Montrer que $ab + ac + bc = 0$ et en déduire que a, b, c sont les trois racines cubiques d'un même nombre complexe de module 1. Qu'en déduit-on concernant le triangle T ?
3. Soit m l'équibarycentre de a, b, c.
   Montrer que les points $0, m, h$ sont alignés (et confondus $\Leftrightarrow T$ est équilatéral).
4. Si T n'est pas équilatéral, la droite E contenant $0, m, h$ est appelée *droite d'Euler* de T.
   Montrer qu'alors : $z \in E \Leftrightarrow \overline{h}\, z - h\, \overline{z} = 0$ (c'est donc l'équation de E).
5. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

II. Deux propriétés classiques de l'orthocentre

1. Identifier les symétriques de h par rapport aux milieux des cotés du triangle T et vérifier que ce sont éléments du cercle circonscrit $\mathcal{U}$.
2. Montrer que la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite (ab) est l'application qui à tout point z associe le point $z' = -ab\, \overline{z} + a + b$.
   Caractériser de manière analogue la projection orthogonale sur la droite (ab).
3. Prouver que les symétriques de h par rapport aux cotés de T sont sur $\mathcal{U}$.
4. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

III. Le triangle orthique

On note α, β, γ les projetés respectifs du point h sur les droites $(bc), (ca), (ab)$ (c'est-à-dire les pieds des hauteurs au triangle T issues respectivement des sommets a, b, c.)

On dit que le triangle $H = \alpha\beta\gamma$ est le *triangle orthique* de T.

On supposera ici que le triangle T n'est pas rectangle, pour que α, β, γ soient distincts.

1. Montrer que $\alpha = \frac{1}{2}(h - \overline{a}bc)$ (utiliser (II.2)). Donner les expressions de β et γ.
2. Déduire de ces expressions de α, β, γ que les droites $(0a)$, $(0b)$ et $(0c)$ sont respectivement orthogonales aux droites $(\beta\gamma)$, $(\alpha\gamma)$, et $(\alpha\beta)$.
3. Montrer que la droite (γc) est bissectrice des droites $(\gamma\alpha)$ et $(\gamma\beta)$.
   Indication : pour établir $(\widehat{\gamma\alpha, \gamma c}) = (\widehat{\gamma c, \gamma\beta})\ [\pi]$, on utilisera en le justifiant le fait que a, γ, α, c sont cocycliques, ainsi que a, γ, h, β.
   En déduire que si les angles de T sont aigus, le triangle orthique est la trace d'un faisceau lumineux ou à la trajectoire d'une boule de billard `;-)` inscrite dans le triangle T.
4. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

IV. Le cercle d'Euler, ou cercle des neuf points

On appelle *cercle d'Euler* du triangle T le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit aux milieux des cotés de T (et le triangle joignant ces trois points est appelé le *triangle médian* de T.)

1. Montrer que $\mathcal{C}$ a pour centre $k = \frac{1}{2}\,h$ et pour rayon $\frac{1}{2}$.
   Par quelle homothétie de rapport positif le cercle $\mathcal{C}$ se déduit-il de $\mathcal{U}$?
2. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ contient (outre les milieux des cotés de T.)
   (a) Les milieux des segments $[ha]$, $[hb]$ $[hc]$.
   (b) Les points α, β, γ, pieds des hauteurs menées de a, b, c au triangle T.
   Ces propriétés justifient que $\mathcal{C}$ soit appelé *cercle des neuf points du triangle* T.
3. Faire une figure montrant $\mathcal{U}, T, \mathcal{C}$ et les trois triangles dont $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit.
4. Dans cette question, T est supposé non rectangle. Le point h est donc distinct de a, b, c.
   (a) Quels sont les orthocentres des triangles hab, hbc et hac ?
   (b) En déduire que ces trois triangles on le même cercle d'Euler que le triangle T.
   (c) Indiquer comment les cercles circonscrits à hab, hbc et hac se déduisent de $\mathcal{U}$.
   (d) Montrer que le résultat de IV.4.c est aussi une conséquence de celui de II.3.
   (e) Faire une figure illustrant le résultat de cette question.

V. Une propriété caractéristique du triangle orthique

Dans cette partie, on suppose que tous les angles du triangle T sont aigus.
On note u (resp. v, w) un point quelconque du segment $[ab]$ (resp. $[ac]$, $[bc]$).
Soit Δ le triangle de sommets u, v, w. Il est donc inscrit dans le triangle T.
On va montrer son périmètre $\psi(\Delta)$ est minimum quand Δ est le triangle orthique de T.

1. On note x (resp. y) le symétrique de u par rapport à la droite (ca) (resp. (cb)).
   Le segment $[xy]$ coupe le segment $[ac]$ en u' et le segment $[bc]$ en u''.
   (a) Montrer que si u est fixé, le périmètre de Δ est minimum quand $v = u'$ et $w = u''$.
   (b) Montrer que la valeur de ce mimimun est $|b - a|\,|c - u|$.
2. Comme dans les parties III et IV, on note α, β, γ les pieds des hauteurs au triangle T issues respectivement des sommets a, b, c.
   (a) Montrer que si $u = \gamma$, alors $u' = \beta$ et $u'' = \alpha$.
   (b) En déduire le triangle orthique est le triangle de périmètre minimum inscrit dans T.