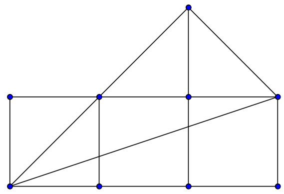
Les formules « à la John Machin »

Le problème est consacré à quelques-unes des (très) nombreuses formules qui expriment π (ou plutôt $\pi/4$) sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients entiers d'arc-tangentes d'inverses d'entiers.

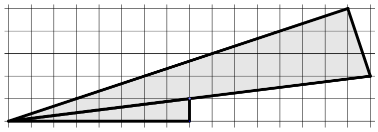
La plus célèbre est : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$ (John Machin, 1706, avec laquelle il calcula 100 décimales de π).

Pour cette raison, les formules : $\dfrac{\pi}{4} = a_1\arctan\dfrac{1}{b_1} + a_2\arctan\dfrac{1}{b_2} + \cdots + a_p\arctan\dfrac{1}{b_p}$, où les a_k et les b_k sont des entiers (les $b_k \geqslant 2$), sont souvent appelées formules "à la Machin".

Première partie : Machin et Fibonacci



1. Les questions (1a) et (1b) doivent être traitées uniquement par la géométrie.
   (a) Observer la figure ci-contre et en déduire : $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$.



   (b) Avec la figure ci-contre, établir : $\arctan\dfrac{1}{3} = \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}$:
   En déduire une nouvelle formule "à la Machin".

2. On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
   On pose également, pour tout $n \geqslant 1$: $G_n = \arctan\dfrac{1}{F_n}$.
   (a) Prouver l'égalité $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (b) En déduire l'égalité $G_{2n} = G_{2n+1} + G_{2n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$.
   Écrire les égalités qui en résultent pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, en déduire les formules "à la Machin" : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \arctan\dfrac{1}{F_{2k+1}} + \arctan\dfrac{1}{F_{2n}}$
   Expliciter la formule si $n = 4$. Qu'obtient-on quand $n \to +\infty$?

Deuxième partie : Machin et Lehmer

1. Dans cette question, $z = a + ib$ est un nombre complexe donné, avec a dans $\mathbb{R}$ et b dans $\mathbb{R}^*$.
   (a) Exprimer l'argument de z (modulo π) en fonction de $\arctan\dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$ (et préciser le cas $a = 0$).
   (b) On pose $\varphi(z) = (-n + i)z$, où n est la partie entière de $\dfrac{a}{b}$.
   Montrer que si $b > 0$ alors $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi(z) < b$, et que si $b < 0$ alors $b < \operatorname{Im}\varphi(z) \leqslant 0$.

2. Dans cette question, a et b sont donnés dans $\mathbb{Z}^*$.
   On définit une suite $z_0, z_1, \cdots, z_k, \cdots$, de premier terme $z_0 = a + ib$, de la façon suivante :
   Si z_k est connu et si $\operatorname{Im} z_k \neq 0$, on pose $z_{k+1} = \varphi(z_k)$ (voir II.1.b).
   (a) Montrer que la suite (z_k) est *finie*. Il existe donc un plus petit $p \geqslant 1$ tel que $\operatorname{Im} z_p = 0$.
   (b) En déduire l'existence d'entiers $n_0, \ldots, n_{p-1}$ tels que : $\arctan\dfrac{b}{a} \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \arctan\dfrac{1}{n_k} \pmod{\pi}$.
   NB : si $n_k = 0$, on convient que $\arctan\dfrac{1}{n_k} \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

3. L'algorithme qui passe de $z = a + ib$ à la liste $[n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}]$ est attribué à D.H.Lehmer (1938).
   (a) Effectuer les calculs pour $z = 20 + 3i$. En déduire : $\arctan\dfrac{3}{20} = \arctan\dfrac{1}{6} - \arctan\dfrac{1}{62} - \arctan\dfrac{1}{7628}$
   (b) Écrire une procédure Maple `Lehmer` prenant en argument un nombre complexe z (supposé sous la forme $z = a + ib$ avec a, b dans $\mathbb{Z}^*$) et qui renvoie la liste $[n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}]$.
   On rappelle l'existence des fonctions intégrées `Re`, `Im` et `floor`.

Troisième partie : Machin et Gregory

Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout x de $[0,1]$, on pose $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.
Ainsi, et pour que les notations soient bien claires :

$$u_0(x) = x, \quad u_1(x) = x - \frac{x^3}{3}, \quad u_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}, \quad \cdots, \quad u_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

1. Pour tout t de $[0,1]$, montrer que $u_n'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} + (-1)^n R_n(t)$, avec $R_n(t) = \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
2. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $[0,1]$, on a : $u_n(x) = \arctan x + (-1)^n \displaystyle\int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En remarquant que $0 \leqslant R_n(t) \leqslant t^{2n+2}$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, montrer que :
   (a) pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{2n+1}(x) \leqslant \arctan x \leqslant u_{2n}(x)$
   (b) pour tout n de $\mathbb{N}$, on a la majoration : $|\arctan x - u_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$
4. Déduire de ce qui précède que la suite $n \mapsto u_n(x)$ converge vers $\arctan x$.
   On exprime cela symboliquement par la "formule de Gregory" (1672) : $\forall x \in [0,1],\ \arctan x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
   NB : le résultat de (III.3.a) dit que deux $u_n(x)$ successifs encadrent $\arctan x$.
5. Soit (F) : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j \arctan \frac{1}{b_j}$ une formule "à la Machin" (les a_j dans $\mathbb{Z}$, les $b_j \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$).
   On suppose par exemple $2 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_p$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = 4 \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j\, u_n\Big(\frac{1}{b_j}\Big)$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = \pi$. Justifier que si on recherche la rapidité de la convergence vers π on doit privilégier les formules (F) avec la plus grande valeur de b_1 possible.
   (b) Dans le cas où (F) est la formule de John Machin, estimer à partir de quand on a $|\pi - v_n| \leqslant 10^{-100}$.

Quatrième partie : Machin et Gauss

1. Soit (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, avec $|x| \geqslant 1$ et $|y| > 1$. Prouver les trois égalités suivantes :
   $\arctan \dfrac{1}{x} + \arctan \dfrac{1}{y} = \arctan \dfrac{x+y}{xy-1}$; $\arctan \dfrac{1}{x} - \arctan \dfrac{1}{y} = \arctan \dfrac{y-x}{1+xy}$; $2\arctan \dfrac{1}{y} = \arctan \dfrac{2y}{y^2-1}$
2. Démontrer la formule de John Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239}$.
3. Montrer successivement les égalités suivantes :
   (a) : $\arctan \dfrac{1}{5} = \arctan \dfrac{17}{331} + \arctan \dfrac{123}{836}$ $\quad (b)$: $\arctan \dfrac{123}{836} = 2\arctan \dfrac{3}{41}$
   (c) : $\arctan \dfrac{17}{331} = \arctan \dfrac{1}{18} - \arctan \dfrac{1}{239}$ $\quad (d)$: $\arctan \dfrac{3}{41} = \arctan \dfrac{1}{18} + \arctan \dfrac{1}{57}$
4. En déduire la formule "à la Machin" : $\dfrac{\pi}{4} = 12\arctan \dfrac{1}{18} + 8\arctan \dfrac{1}{57} - 5\arctan \dfrac{1}{239}$.
   Cette formule, attribuée à Gauss, a permis de calculer un million de décimales de π en 1974.