Fonctions dilatantes

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tous réels x et y, on a $|f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|$.

1. (a) Montrer que f est injective
   (b) Montrer que f est strictement monotone.
   (c) Montrer que f est non bornée et bijective.
2. On suppose qu'il existe a et b dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$, tels que $f([a, b]) \subset [a, b]$.
   (a) Montrer qu'il existe un point c de $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.
   (b) On suppose que f est croissante. Peut-on avoir $f(a) > a$ ou $f(b) < b$?
   Déterminer la restriction de f au segment $[a, b]$.
   (c) On suppose que f est décroissante. Déterminer sa restriction à $[a, b]$.
3. On suppose désormais que f est croissante.
   Soit Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé Oxy.
   (a) On suppose que $f(x) < x$ pour tout x réel.
   Montrer qu'alors Γ admet en $+\infty$ une asymptote parallèle à la droite $y = x$.
   (b) Que dire de Γ si on a $x < f(x)$ pour tout x réel ?
   (c) Soit U l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = x$.
   Montrer que si U est vide, on se trouve dans l'un des deux cas précédents.
   Montrer que si U est non vide et borné, il est réduit à un point ou à un segment.
   Quelle peut être la nature de U s'il est non borné ?
   Expliciter une application f croissante pour chacune des formes de U possibles.
4. On suppose que U est non vide.
   On considère la suite (x_n) définie par u_0 dans $\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout n.
   Montrer que cette suite est soit constante, soit convergente vers un point frontière de U.