Factorisations dans les sommes $1^k + 2^k + \cdots + n^k$

Pour tous entiers n et p on pose $S_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$. On note que $S_0(n) = n$.

On sait que $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On se pose la question suivante : $S_p(n)$ est-il toujours factorisable par $n(n+1)$?
Peut-on même prouver mieux que cette factorisation ?

1. Dans cette question on va montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$, qu'il existe un polynôme A_p à coefficients rationnels et de degré $p-1$ tel que : $\forall n \geqslant 1,\ S_p(n) = n(n+1)\, A_p(n)$.
   (a) Vérifier que cela est vrai si $1 \leqslant p \leqslant 3$ et préciser A_1, A_2, A_3.
   (b) En utilisant le développement de $(k+1)^{p+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ montrer l'égalité suivante
   (E_p) : $\quad \forall n \geqslant 1,\ (n+1)^{p+1} - n - 1 = (p+1)S_p(n) + \sum\limits_{j=1}^{p-1} \dbinom{p+1}{j} S_j(n)$.
   (c) Montrer qu'il existe un polynôme $\widehat{A}_p(n)$ à coefficients entiers, de degré $p-1$, tel que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité : $(n+1)^{p+1} - n - 1 = n(n+1)\widehat{A}_p(n)$.
   (d) En déduire que la propriété à démontrer est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$.
   (e) Montrer que le coefficient dominant de $A_p(n)$ est $\dfrac{1}{p+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$.
   (f) Avec ce qui précède, mais sans utiliser $S_p(n)$ pour $p < 4$, calculer l'expression de $S_4(n)$.

2. On va améliorer le résultat précédent en montrant que le polynôme $n \mapsto S_p(n)$ est :
   — Factorisable par $n(n+1)(2n+1)$ pour tout entier pair $p \geqslant 2$.
   Plus précisément, on va prouver que pour tout entier $p = 2q \geqslant 2$, il existe un polynôme B_q à coefficients rationnels et de degré $2(q-1)$ tel que : $\forall n \geqslant 1,\ S_{2q}(n) = n(n+1)(2n+1)\, B_q(n)$.
   On sait que ce résultat est vrai pour $q = 1$, avec $B_1(n) = 1/6$.
   — Factorisable par $n^2(n+1)^2$ pour tout entier impair $p \geqslant 3$.
   Plus précisément, on va prouver que pour tout entier $p = 2q+1 \geqslant 3$, il existe un polynôme C_q à coefficients rationnels et de degré $2(q-1)$ tel que : $\forall n \geqslant 1,\ S_{2q+1}(n) = n^2(n+1)^2\, C_q(n)$.
   On sait que ce résultat est vrai pour $q = 1$, avec $C_1(n) = 1/4$.
   (a) En utilisant le développement de $(k-1)^{p+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ montrer l'égalité :
   (E'_p) : $\quad \forall n \geqslant 1,\ \ n^{p+1} - n(-1)^p = (p+1)S_p(n) + \sum\limits_{j=1}^{p-1} \dbinom{p+1}{j} (-1)^{p-j} S_j(n)$.
   (b) On définit le polynôme $Q_p(x) = (x+1)^{p+1} + x^{p+1} - x - (-1)^p x - 1$.
   En ajoutant les égalités (E_p) et (E'_p), montrer qu'on peut écrire l'égalité suivante :
   (E''_p) : $\quad \forall n \geqslant 1,\ S_p(n) = \dfrac{1}{2(p+1)}\left(Q_p(n) - 2 \sum\limits_{1 \leqslant k < p/2} \dbinom{p+1}{p-2k} S_{p-2k}(n)\right)$
   (c) Dans cette question, on suppose que p est pair. On pose $p = 2q$, avec $q \geqslant 1$.
   Réécrire (E''_p) dans ce cas. Montrer que $Q_{2q}(n)$ est le produit de $n(n+1)(2n+1)$ et d'un polynôme en n à coefficients rationnels, et conclure par récurrence forte (pour les p pairs).
   (d) Dans cette question, on suppose que $p = 2q+1$, avec $q \geqslant 1$. Réécrire (E''_p) dans ce cas.
   On sera amené à prouver que le polynôme $R_{2q+1}(n) = Q_{2q+1}(n) - 2(q+1)n(n+1)$ est le produit de $n^2(n+1)^2$ et d'un polynôme en n à coefficients rationnels, et on conclura par récurrence forte (pour les p impairs).
   (e) Avec ce qui précède, mais sans utiliser $S_p(n)$ pour $p < 5$, calculer l'expression de $S_5(n)$.