La fonction exponentielle réelle par les suites adjacentes

1. Pour tout réel $t > -1$, et pour tout entier $n \geqslant 2$, vérifier que $(1+t)^n \geqslant 1 + nt$.
   Plus précisément, on prouvera qu'il y a égalité si et seulement si $t = 0$.

2. Dans cette question, x est un réel quelconque, mais **fixé**.
   Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. Pour $n > |x|$, on pose $v_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

   (a) En utilisant la question précédente, montrer que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.
   Plus précisément, montrer que cette monotonie est stricte si x est non nul.

   (b) Étudier de même la monotonie de la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$.

   (c) Pour tout $n > |x|$, prouver l'encadrement $0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$.
   En déduire que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on note $\exp(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x)$.
   Il reste à montrer qu'on obtient ainsi une définition de la fonction exponentielle.
   Vérifier que $\exp(0) = 1$, puis que $\exp(x) > 0$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$ pour tout x.

4. Dans cette question, on prouve l'égalité fondamentale $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

   (a) Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle tendant vers 0. On veut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\lambda_n}{n}\right)^n = 1$.
   Montrer : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow 1+\lambda_n \leqslant \left(1+\dfrac{\lambda_n}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{1}{1-\lambda_n}$ et conclure.

   (b) Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, montrer que $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.
   Indication : utiliser λ_n tel que $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1+\dfrac{y}{n}\right) = \left(1+\dfrac{\lambda_n}{n}\right)\left(1+\dfrac{x+y}{n}\right)$.

5. On prouve ici que $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$.

   (a) Pour tout x de $]-1, 1[$, montrer que $1 + x \leqslant \exp(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

   (b) En déduire que l'application $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable en 0 et que $\exp'(0) = 1$.

   (c) Montrer que $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$.

6. Dans cette question, on obtient deux limites usuelles et on montre que l'application exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   (a) Soit x dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $n \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ est croissante à partir de $n = 1$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   (c) Montrer que l'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   On note ln ("logarithme népérien") la bijection réciproque de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

   (d) Pour tous x, y de $\mathbb{R}^{+*}$, montrer que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.