Équations fonctionnelles

Première partie

On se propose de déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{1}$$

1. Déterminer les solutions constantes de (1).
2. On suppose que f est une solution non constante de (1).
   Soit F la primitive de f qui s'annule à l'origine.
   (a) Montrer que pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a : $F(x+y) - F(x-y) = 2f(x)F(y)$.
   (b) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f''(0)f(x) \\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0 \end{cases}$
3. Déterminer toutes les solutions continues de (1).

Deuxième partie

On se propose de déterminer les applications continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{2}$$

1. Montrer que pour tout couple solution (f, g) de (2), l'application f est paire.
2. Soit (f, g) un couple solution de (2). On suppose que f n'est pas constante.
   (a) Montrer que pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a : $g(-x)g(-y) = g(x)g(y)$.
   Montrer que g n'est pas paire, et en déduire que g est impaire.
   (b) Calculer $f(0)$, ainsi que $f^2(x) + g^2(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que f est solution de (1).
3. Trouver tous les couples (f, g) solutions de (2).

Troisième partie

On se propose de déterminer les applications continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y) \tag{3}$$

1. Soit (f, g) un couple solution de (3). On suppose que f, g ne sont pas identiquement nulles.
   On note F, G les primitives de f, g qui s'annulent en 0.
   (a) Montrer que pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a $F(x+y) - F(x-y) = 2f(x)G(y)$.
   (b) En déduire que f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Prouver que l'application g vérifie la relation (1).
   (d) Montrer que pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x)g(y) = f(x)g''(y)$.
2. Déterminer tous les couples solutions de l'équation (3).