L'équation du troisième degré

Le but du problème est la résolution de l'équation :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4,\ a \neq 0$$

1. Montrer qu'il existe h dans $\mathbb{C}$ tel que le changement de variable $y = x + h$ transforme l'équation (1) en une équation (2) : $y^3 + py + q = 0,\ (p, q) \in \mathbb{C}^2$.

   Que dire si $p = q = 0$? Dans toute la suite, on supposera $(p, q) \neq (0, 0)$.

2. Dans l'équation (2), on pose $y = u + v$, avec (u, v) dans $\mathbb{C}^2$.

   Montrer que si on impose (3) $\begin{cases} uv = -\dfrac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$, alors $y = u + v$ est solution de (2).

3. Les nombres complexes u et v étant supposés vérifier (3), montrer que u^3 et v^3 vérifient l'équation (4) : $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$, dont on note t' et t'' les solutions dans $\mathbb{C}$.

4. Soit α une racine cubique d'une solution non nulle de (4).

   Montrer que $y_0 = \alpha - \dfrac{p}{3\alpha}$, $y_1 = j\alpha - \dfrac{p}{3\alpha}j^2$, $y_2 = j^2\alpha - \dfrac{p}{3\alpha}j$ sont solutions de (2).

5. Plus précisément, montrer que y_0, y_1 et y_2 sont *les* solutions de (2).

6. En déduire l'expression des solutions x_0, x_1, x_2 de l'équation (1).

7. On se place dans le cas particulier $q^2 + \dfrac{4p^3}{27} = 0$. Que dire de l'équation (4) ?

   Montrer qu'on peut choisir α tel que $\alpha^2 = -\dfrac{p}{3}$.

   Quelles solutions obtient-on alors pour l'équation (1) ?

8. Dans cette question, on suppose que a, b, c, d sont réels. On pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.
   (a) Si $\Delta > 0$ montrer que (1) a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
   (b) Si $\Delta < 0$, montrer que (1) a trois racines réelles.
   (c) Si $\Delta = 0$, montrer que (1) a une racine réelle simple et une racine réelle double.

9. On suppose que a, b, c, d sont réels, avec $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$.

   Montrer que $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r = \sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ et $\cos 3\theta = \dfrac{3q}{2p}\sqrt{-\dfrac{3}{p}}$.

   Si φ est tel que $\cos\varphi = \cos 3\theta$, donner les solutions de (1) en fonction de φ, p, a, b.

10. (a) Trouver les solutions de $8x^3 - 12x^2 - 18x + 19 = 0$ à 10^{-3} près.

    (b) Résoudre $8x^3 + 12x^2 - 18x + 5 = 0$.

    (c) Résoudre $x^3 + 6x^2 + 10x + 8 = 0$.

11. On suppose toujours que p et q sont des nombres réels.

    En étudiant l'application $f : y \mapsto y^3 + py + q$, retrouver les résultats de la question (9), c'est-à-dire la nature des solutions de l'équation (2) en fonction du signe de $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ (en revanche, on ne cherchera pas ici à retrouver l'expression de ces solutions.)