Définition de la fonction exponentielle complexe

Ce problème est la suite... du précédent (définition de la fonction exponentielle réelle par les suites adjacentes). En voici le plan général.

- Avant le début du problème, on ne connait que la fonction exponentielle réelle, la fonction logarithme népérien, et leurs propriétés.

  On ne connait en particulier ni la fonction exponentielle complexe, ni les fonctions trigonométriques, ni même le nombre π !

- Dans la partie I, on définit la fonction exponentielle complexe, puis les fonctions puissances $z \mapsto a^z$, avec a dans $\mathbb{R}^{+*}$ et z dans $\mathbb{R}$.

- Dans la partie II, on définit les fonctions sin, cos, le nombre π, et la fonction tan.

- La partie III est consacrée à la définition de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$, puis à celle des fonctions $z \mapsto \operatorname{Arg}(z)$ et $z \mapsto \ln(z)$ définies pour tout nombre complexe z non réel négatif.

- A chaque étape on *définit* donc des fonctions déjà connues (pour certaines depuis longtemps), mais dont vous n'aviez pas reçu de définition vraiment sérieuse. Il faut donc oublier ce qu'on connait déjà de ces fonctions, pour en retrouver patiemment toutes les propriétés.

- Important : on respectera scrupuleusement la numérotation des questions, et on indiquera, aussi souvent que nécessaire, quelles sont les questions dont on utilise les résultats pour étayer ses démonstrations.

I. Définition de la fonction exponentielle complexe

Dans cette partie, on **définit** la fonction $z \mapsto \exp(z)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Dans cette question, z est un nombre complexe quelconque, mais fixé.
   On pose $u_n(z) = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Soit k dans $\mathbb{N}$. Montrer que la suite $n \mapsto \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$ est croissante pour $n \geqslant k$.
   (b) Montrer que si $1 \leqslant n < m$, alors $|u_m(z) - u_n(z)| \leqslant u_m(|z|) - u_n(|z|)$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n(z))_{n\geqslant 1}$ est convergente dans $\mathbb{C}$.

2. Pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(z) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.
   Cette définition généralise bien sûr celle de $\exp(x)$ pour x réel, vue dans le DM n°3.
   Dans cette question, on prouve l'égalité fondamentale $\exp(z)\exp(z') = \exp(z + z')$.
   (a) Soit ω un nombre complexe. Montrer que $\left|\left(1 + \dfrac{\omega}{n}\right)^n - 1\right| \leqslant \left(1 + \dfrac{|\omega|}{n}\right)^n - 1$.
   (b) Pour tous z, z' de $\mathbb{C}$, montrer que $\exp(z)\exp(z') = \exp(z + z')$.
   Indication : introduire ω_n tel que $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)\left(1 + \dfrac{z'}{n}\right) = \left(1 + \dfrac{\omega_n}{n}\right)\left(1 + \dfrac{z + z'}{n}\right)$.
   (c) Pour tout z de $\mathbb{C}$, vérifier les propriétés suivantes :
   $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$, $\exp(z) \neq 0$ et $\exp(-z) = (\exp(z))^{-1}$, $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\,(z))$.
   Montrer que $\exp(z)$ est de module 1 si et seulement si z est imaginaire pur.

3. Dans cette question, on **définit** les fonctions $z \mapsto a^z$ (avec a dans $\mathbb{R}^{+*}$ et z dans $\mathbb{C}$).
   On commence par poser $\mathrm{e} = \exp(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
   On rappelle que l'application $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est la bijection inverse de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$.
   Pour tout réel strictement positif a, et pour tout z de $\mathbb{C}$, on pose $a^z = \exp(z \ln a)$.
   (a) Pour tout z de $\mathbb{C}$, vérifier que $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.
   (b) On se donne a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ et z, z' dans $\mathbb{C}$.
   Vérifier les égalités : $a^z a^{z'} = a^{z+z'}$, $a^z b^z = (ab)^z$, $(a^b)^z = a^{bz}$.

II. Les fonctions $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \tan(x)$ et le nombre π.

1. Dans cette question, on **définit** les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Plus précisément, pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\cos(x) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{ix})$ et $\sin(x) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^{ix})$.
   Puisque $\mathrm{e}^0 = 1$, on a évidemment $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.
   (a) Montrer que l'application $x \mapsto \cos x$ (resp. $x \mapsto \sin x$) est paire (resp. impaire.)
   (b) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
   (c) Pour tous x, y prouver que $\begin{cases} \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x);\ \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \end{cases}$

2. On établit ici la dérivabilité des applications $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$.
   (a) Soit z dans $\mathbb{C}$, et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - 1 - z\right| \leqslant \left(1+\dfrac{|z|}{n}\right)^n - 1 - |z|$.
   (b) Prouver alors que $|\mathrm{e}^z - 1 - z| \leqslant \dfrac{|z|^2}{1-|z|}$ si $|z|<1$ (on utilisera aussi (5a) du DM3).
   (c) En déduire que les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.
   Indication : considérer $\mathrm{e}^{i(x+h)} - \mathrm{e}^{ix} - ih\mathrm{e}^{ix}$ avec x dans $\mathbb{R}$ et $-1<h<1$.

3. Ici on **définit** le nombre π et on étudie les variations de $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.
   (a) On suppose, par l'absurde, que $\cos x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.
   On pose alors $f(x) = \cos(x) - \cos(a) + (x-a)\sin(a)$ pour $x \geqslant a$ ($a>0$ donné).
   Etudier les variations de f et en déduire une contradiction.
   (b) Soit $A = \{x \in \mathbb{R}^+, \cos(x) \leqslant 0\}$. Justifier l'existence de $\alpha = \inf A$ dans $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que $\cos(\alpha) = 0$, puis $\sin(\alpha) = 1$.
   (c) Par **définition**, on pose $\pi = 2\alpha$.
   Vérifier que $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$. Que valent $\mathrm{e}^{i\pi/2}$ et $\mathrm{e}^{i\pi}$?
   Évaluer $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos(x+\pi)$, $\sin(x+\pi)$, $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi - x)$.
   Montrer que les applications $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont 2π-périodiques.
   En déduire la courbe représentative de ces deux applications sur $[-\pi, \pi]$.

4. Dans cette question, on définit $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$.
   Indiquer le domaine de définition de cette fonction, sa dérivabilité, sa parité, sa périodicité.
   Vérifier que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$ et tracer son graphe sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

III. Fonctions Argument principal et Logarithme principal

1. Dans cette question, on **définit** la fonction arctan (“*Arc tangente*”).
   Pour tout réel x, on pose $t_0(x) = x$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $t_{n+1}(x) = \dfrac{t_n(x)}{1+\sqrt{1+t_n^2(x)}}$.
   (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, montrer que $n \mapsto 2^n\,|t_n(x)|$ est décroissante.
   En déduire que la suite $n \mapsto 2^n t_n(x)$ est convergente.
   (b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\arctan x = \lim\limits_{n \to +\infty} 2^n t_n(x)$.
   Montrer que l'application $x \mapsto \arctan x$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Soit x fixé dans $\mathbb{R}$. On établit ici des propriétés de $n \mapsto t_n(x)$.
   (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, vérifier $|t_{n+1}(x)| < 1$ et prouver l'égalité $t_n(x) = \dfrac{2t_{n+1}(x)}{1-t_{n+1}^2(x)}$.
   (b) En déduire que $\dfrac{1+it_n(x)}{|1+it_n(x)|} = \left(\dfrac{1+it_{n+1}(x)}{|1+it_{n+1}(x)|}\right)^2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (c) Montrer finalement que $\left(\dfrac{1+it_n(x)}{|1+it_n(x)|}\right)^{2^n} = \dfrac{1+ix}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. Dans cette question, on **définit** la fonction Arg (“*argument principal*”).

   Soit $z = x + iy$ (avec x, y dans $\mathbb{R}$) un élément de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

   Remarque : dire que z n'est pas un réel négatif ou nul, c'est dire que $\mathrm{Re}\,(z) > -|z|$.

   On pose $\mathrm{Arg}\,(z) = 2\arctan \dfrac{\mathrm{Im}\,(z)}{\mathrm{Re}\,(z) + |z|} = 2\arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

   (a) Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et tout λ de $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\mathrm{Arg}\,(\lambda z) = \mathrm{Arg}\,(z)$.
   En particulier, on a $\mathrm{Arg}\,(z) = \mathrm{Arg}\,(z/|z|)$ pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

   (b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, montrer l'égalité $\arctan(x) = \mathrm{Arg}\,(1 + ix)$.
   Indication : considérer la suite $n \mapsto t_n(x')$, avec $x' = t_1(x)$.

4. On se donne z dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On va montrer l'égalité $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\mathrm{Arg}\,(\omega)}$.

   On pose $x = \dfrac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z| + \mathrm{Re}\,(z)}$, et on définit la suite $(t_n(x))_{n\geqslant 0}$, comme précédemment.

   (a) Préciser $\omega_n(x)$ dans $\mathbb{C}$ tel que $1 + i\dfrac{\arctan x}{2^n} = (1 + it_n(x))\Big(1 + \dfrac{\omega_n(x)}{2^n}\Big)$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n(x) = 0$.

   (b) En utilisant les résultats de $(DM3 : 4a)$ et I.2a, prouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(1 + \dfrac{\omega_n(x)}{2^n}\Big)^{2^n} = 1$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + it_n(x))^{2^n} = \exp\Big(\dfrac{i}{2}\mathrm{Arg}\,(z)\Big)$.

   (c) Utiliser finalement la question II.2c pour montrer que $\mathrm{e}^{i\mathrm{Arg}\,(z)} = \dfrac{(1 + ix)^2}{1 + x^2} = \dfrac{z}{|z|}$.

5. Dans cette question, on va vérifier l'égalité $\mathrm{Arg}\,(\mathrm{e}^{i\theta}) = \theta$ pour tout θ de $]-\pi, \pi[$.

   On se donne donc θ dans $]-\pi, \pi[$, et on pose $x = \tan(\theta/2)$.

   On définit les $t_n(x)$ comme dans (III.1).

   (a) Vérifier que $\mathrm{Arg}\,(\mathrm{e}^{i\theta}) = 2\arctan(x)$.

   (b) Donner l'expression de $t_n(x)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

   (c) En déduire $\mathrm{Arg}\,(\mathrm{e}^{i\theta}) = \theta$, et en particulier $\mathrm{Arg}\,(i) = \dfrac{\pi}{2}$.

   (d) Montrer que l'application $x \mapsto \arctan(x)$ est la bijection réciproque de la restriction de l'application $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $\Big]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big[$.

6. Dans cette question on **définit** la fonction Log (dite “logarithme principal”).

   Plus précisément, on pose $\mathrm{Log}\,(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}\,(z)$, pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

   (a) Pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{Log}\,(z)} = z$.

   (b) Montrer que l'application $z \mapsto \exp(z)$ est une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$.