Borne supérieure et sous-gradient

Notations

Dans tout le problème, f est une fonction à valeurs réelles, définie une partie X non vide de $\mathbb{R}$.

— Pour tout m de $\mathbb{R}$, on note f_m l'application définie sur X par : $f_m(x) = mx - f(x)$.

— On note X° l'ensemble (éventuellement vide) des réels m tels que f_m soit majorée sur X.
Autrement dit : $m \in X^\circ \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in X,\ mx - f(x) \leqslant \lambda$.

— Quand $X^\circ \neq \emptyset$, on définit l'application f° sur X° par : $\forall\, m \in X^\circ,\ f^\circ(m) = \sup\limits_{x \in X} f_m(x)$.
Ainsi $f^\circ(m)$ est le réel minimum λ tel que : $\forall\, x \in X,\ mx - f(x) \leqslant \lambda$.

Première partie

1. Interpréter géométriquement l'appartenance d'un réel m à l'ensemble X°, ainsi que la droite d'équation $y = mx - f^\circ(m)$.
2. Préciser (X°, f°) quand f est définie sur $X = \mathbb{R}$ par $f(x) = x$, ou $f(x) = x^2$, ou $f(x) = x^3$.
Dans toute la suite, on suppose que X° est non vide.
3. Montrer que pour tout x de X, on a : $f(x) \geqslant \sup\limits_{m \in X^\circ} (xm - f^\circ(m))$.
4. Montrer que X° est un intervalle de $\mathbb{R}$ (Indication : montrer que si X° contient deux points, alors il contient le segment qui les joint.)
5. On suppose que X est un segment de $\mathbb{R}$, et que f est continue sur X.
Déterminer X°, et montrer que : $\forall\, m \in X^\circ,\ \exists\, x_m \in X,\ f(x_m) = mx_m - f^\circ(m)$.

Deuxième partie

On définit $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ à partir de (X°, f°), tout comme on a défini (X°, f°) à partir de (X, f).
Autrement dit, pour tout x de $X^{\circ\circ}$, on a $f^{\circ\circ}(x) = \sup\limits_{m \in X^\circ} f^\circ_x(m) = \sup\limits_{m \in X^\circ} (xm - f^\circ(m))$.
$f^{\circ\circ}(x)$ est donc le réel minimum λ tel que, pour tout m de X°, on ait $f^\circ(m) \geqslant xm - \lambda$.

1. (a) Déterminer (X°, f°) et $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ avec $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = |x|$.
   (b) Même question avec $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = |1 - |x||$.
   (c) Idem avec $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ et $\{f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 1\}$.
2. Montrer que X est inclus dans $X^{\circ\circ}$, et qu'on a $f^{\circ\circ} \leqslant f$ sur X.
3. Soit Y une partie de $\mathbb{R}$ contenant X, et soit $g : Y \to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout x de X on ait $g(x) \leqslant f(x)$. On définit le couple (Y°, g°).
Montrer que $Y^\circ \subset X^\circ$ et que $f^\circ(m) \leqslant g^\circ(m)$ pour tout m de Y°.
4. On définit le couple $(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ})$ par $X^{\circ\circ\circ} = (X^{\circ\circ})^\circ = (X^\circ)^{\circ\circ}$ et $f^{\circ\circ\circ} = (f^{\circ\circ})^\circ = (f^\circ)^{\circ\circ}$.
Montrer que $X^{\circ\circ\circ} = X^\circ$ et que les applications $f^{\circ\circ\circ}$ et f° sont identiques.

Troisième partie

Soit a un élément de X. On dit qu'un réel m est un *sous-gradient* de f en a si, pour tout élément x de X on a l'inégalité : $f(x) \geqslant f(a) + (x-a)m$.

L'ensemble (éventuellement vide) des sous-gradients de f au point a s'appelle le *sous-différentiel* de l'application f en a et il est noté $\partial_a(f)$.

1. Interpréter géométriquement l'appartenance du réel m à l'ensemble $\partial_a(f)$.
2. Montrer que $\partial_a(f) \subset X^\circ$, et préciser la valeur de f° en tout point m de $\partial_a(f)$.
3. Prouver que si $\partial_a(f)$ est non vide, alors $f^{\circ\circ}(a) = f(a)$.
4. Soit a un élément de $X^{\circ\circ}$. Montrer que $f^{\circ\circ}(a) = f(a) \Rightarrow \partial_a(f^{\circ\circ}) = \partial_a(f)$.
   Indication : montrer successivement $\partial_a(f^{\circ\circ}) \subset \partial_a(f)$ et $\partial_a(f) \subset \partial_a(f^{\circ\circ})$.
5. Montrer que si m est un élément de $\partial_a(f)$, alors a est un élément de $\partial_m(f^\circ)$.
6. On suppose que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   Montrer que pour tout a de $\mathbb{R}$ l'ensemble $\partial_a(f)$ se réduit au singleton $\{f'(a)\}$.