Approximation de $\ln(x)$ par des suites

L'objet de ce problème est l'étude d'un algorithme d'approximation de $\ln x$, pour tout $x > 0$.

Pour tout réel strictement positif x, on pose $T(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ et $S(x) = \dfrac{x^2-1}{2\,x}$.

On pose également $\begin{cases} f(x) = \ln x - T(x) \\ g(x) = S(x) - \ln x \end{cases}$ (et avec ces notations, il est clair que $f(1) = g(1) = 0$)

I. Quelques inégalités

Dans cette partie, x est un réel quelconque de l'intervalle $[1, +\infty[$.

1. Prouver les inégalités : $T(x) \le 2\,T(\sqrt{x})$ et $2\,S(\sqrt{x}) \le S(x)$
2. Prouver les encadrements : $0 \leqslant f'(x) \leqslant (x-1)^2$ et $0 \leqslant g'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}(x-1)^2$
3. En déduire les encadrements : $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{3}(x-1)^3$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{6}(x-1)^3$

II. Convergence de deux suites

Dans toute la suite, sauf dans la question III.6, on suppose que x est un réel fixé, avec $x \geqslant 1$.

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la donnée de $u_0 = x$ et par la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

On définit également les suites $(t_n)_{n\geqslant 0}$ et $(s_n)_{n\geqslant 0}$ par : $\forall\, n \geqslant 0,\ t_n = 2^n\,T(u_n)$ et $s_n = 2^n\,S(u_n)$.

On remarque les valeurs initiales sont $t_0 = T(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ et $s_0 = S(x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \dfrac{1}{2^n}(x-1)$.
   Que peut-on en déduire, concernant la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?
2. Déterminer la monotonie des suites $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Vérifier que la suite $n \mapsto 2^n \ln u_n$ est constante.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a l'encadrement : $t_n \le \ln(x) \le s_n$.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, vérifier que $s_{n+1}^2 = s_n\,t_{n+1}$.
6. Déduire de ce qui précède la limite des suites $(s_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$.

III. Algorithme d'approximation de $\ln x$

Pour tout entier naturel n, on pose $c_n = \dfrac{s_n}{t_n}$, et en particulier $c_0 = \dfrac{x^2+1}{2\,x}$.

1. Exprimer c_n en fonction de u_n.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que : $c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}}$, $s_{n+1} = \dfrac{s_n}{c_{n+1}}$, et $t_{n+1} = \dfrac{s_{n+1}}{c_{n+1}}$
2. Dans cette question, on demande d'écrire une procédure Maple baptisée `approxln`.
   Cette procédure doit prendre en argument un réel $x \geqslant 1$ et un entier p strictement positif.
   Elle doit alors renvoyer $[t_n, s_n], n$, où n est le plus petit entier naturel tel que $0 \leqslant s_n - t_n < 10^{-p}$.
   Pour cela, la procédure `approxln` utilisera les relations de la question III.1.
   Dans la procédure, il n'est pas nécessaire de vérifier que x est dans $[1, +\infty[$ et que p est dans $\mathbb{N}^*$.

Voici le "squelette" de la procédure, qui utilise les variables locales n, t, s, c (et seulement elles) pour y placer les valeurs successives de l'indice n et des termes t_n, s_n, c_n.

```
> approxln := proc(x,p)
    local n,t,s,c:
    ....
    return([t,s],n);
  end proc:
```

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $\ln x - t_n = 2^n\, f(u_n)$ et $s_n - \ln x = 2^n\, g(u_n)$.

4. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a les encadrements :

$$0 \leq \ln x - t_n \leq \frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{4^n}, \quad 0 \leq s_n - \ln x \leq \frac{1}{6}\frac{(x-1)^3}{4^n}, \quad \text{et} \quad 0 \leq s_n - t_n \leq \frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{4^n}$$

5. Dans cette question seulement, on suppose $x = 2$.

   À partir de quel n est-on certain que l'intervalle $[t_n, s_n]$ est de longueur inférieure ou égale à 10^{-8} ?

6. Les questions précédentes décrivent un algorithme d'approximation du réel $\ln x$ par deux suites adjacentes $(t_n)_{n\geqslant 0}$ et $(s_n)_{n\geqslant 0}$, dans l'hypothèse où x est un réel supérieur ou égal à 1.

   Proposer un algorithme d'approximation de $\ln x$ quand $0 < x < 1$, et indiquer comment il convient d'adapter la procédure `approxln` pour qu'elle "gère" toute l'hypothèse $x > 0$.