Calcul intégral et approximation de π^2

Première partie

Dans cette partie, on étudie l'application $x \mapsto f(x) = x \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout $x > 0$.

1. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $I_1(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\pi}{2x}$.
2. (a) Calculer $I_2(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout réel $x > 0$.

   On sera amené à considérer les cas $0 < x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$.

   (b) Vérifier que $I_2(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers 0.
3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$.
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} x I_2(x)$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Dans cette question on établit la dérivabilité de l'application f.

   (a) On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x\cos^2 u + \sin^2 u}$ et $\Delta(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2}$.

   On se donne un réel $x > 0$, et un réel h tel que $|h| < \dfrac{x}{2}$.

   Pour simplifier les calculs, on pourra poser $a(u) = x\cos^2 u + \sin^2 u$.

   Montrer qu'on a la majoration :

   $$\left|\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \Delta(x)\right| \leqslant |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3}$$

   En déduire que Φ est dérivable au point x.

   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(\sin^2 u - x^2\cos^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u$

   (c) Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\cos u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,\mathrm{d}u$.

   (d) Prouver finalement que pour tout $x \neq 1$ on a $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$.

   L'application f' est-elle continue en $x = 1$?
6. Dans cette question, on aboutit à une nouvelle expression de l'application f.

   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t$

   (b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative

Deuxième partie

Dans cette partie on adopte les notations suivantes :

— Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels.
On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite de terme général $S_m = \sum\limits_{n=n_0}^{m} u_n$ converge.

— On note alors $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{m\to+\infty} S_m$ et on dit que $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

— On admettra que s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

— Un résultat classique est $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans cette partie, on exprime π^2 comme la somme d'une série.

On en déduit une méthode de calcul d'une valeur approchée de π^2.

1. (a) Pour tout m de $\mathbb{N}$, montrer que : $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,dt$.

   (b) Prouver qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,dt \leqslant \frac{K}{2m+2}$.

   En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2. (a) Prouver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   (b) En déduire que $\pi^2 = 10 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$.

3. Dans cette question, on pose $h(t) = \dfrac{2}{t(t+1)(2t+1)^2}$, $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} h(n)$ et $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} h(n)$.

   Le résultat de la question II-2-b s'écrit donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \pi^2 = 10 - S_p - R_p$.

   (a) Montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$ et observer qu'elle est décroissante.

   (b) Pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$, prouver les inégalités : $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} h(t)\,dt \leqslant R_p \leqslant \int_p^{+\infty} h(t)\,dt$

   (c) En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{6(p+2)^3} \leqslant R_p \leqslant \dfrac{1}{6p^3}$

   (d) On utilise l'approximation $\pi^2 \approx 10 - S_p - \dfrac{1}{6p^3}$.

   Montrer que l'on commet ainsi une erreur par défaut, majorée par $\dfrac{1}{p^4}$.