

## Approximation d'une solution de $f''(t) = a(t)f(t) + b(t)$

On désigne par  $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications continues.

On suppose que l'application  $t \mapsto a(t)$  est à valeurs positives ou nulles.

Soient  $\lambda, \mu$  deux réels. On considère le problème suivant :

Trouver  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable et telle que 
$$\begin{cases} \forall t \in [0, 1], f''(t) = a(t)f(t) + b(t) \\ f(0) = \lambda, f(1) = \mu \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une équation différentielle avec "conditions aux limites".

On suppose que ce problème admet une solution, désignée par  $f$  dans toute la suite.

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^4$  sur  $[0, 1]$ .

On note  $M_2(f) = \sup_{[0,1]} |f''|$  et  $M_4(f) = \sup_{[0,1]} |f^{(4)}|$ .

L'objectif est ici d'étudier une méthode d'approximation de  $f$  sur  $[0, 1]$ .

Les parties I et II sont indépendantes.

### Première partie

1. Soit  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$ , avec  $\alpha < \beta$ .

On suppose que  $g(\alpha) = 0$  et que  $g(\beta) = 0$ . On pose  $M_2(g) = \sup_{[\alpha, \beta]} |g''|$ .

(a) Montrer que :  $\forall t \in [\alpha, \beta], |g(t)| \leq \frac{(t - \alpha)(\beta - t)}{2} M_2(g)$ .

(b) En déduire que :  $\sup_{[\alpha, \beta]} |g| \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} M_2(g)$ .

2. On garde les notations précédentes, mais on ne suppose plus  $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ .

Prouver l'inégalité :  $\sup_{[\alpha, \beta]} |g| \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} M_2(g) + \max(|g(\alpha)|, |g(\beta)|)$

3. On se donne  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . On pose  $h = \frac{1}{n+1}$ , et  $\forall k \in \{0, \dots, n+1\}, t_k = kh$ .

Pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n+1\}$ , soit  $u_k$  une valeur approchée de  $f(t_k)$ .

On note  $\delta_n = \max\{|u_k - f(t_k)|, 0 \leq k \leq n+1\}$ .

$\delta_n$  représente donc l'erreur maximum commise dans les approximations  $f(t_k) \approx u_k$ .

On définit une application  $\varphi_n$  sur  $[0, 1]$  de la manière suivante :

◇ Pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n+1\}, \varphi_n(t_k) = u_k$ .

◇ Pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n\}, \varphi_n$  est affine sur  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Montrer que  $\sup_{[0,1]} |f - \varphi_n| \leq \frac{M_2(f)}{8(n+1)^2} + \delta_n$ .

## Deuxième partie

On se donne un entier  $n \geq 2$ , et des réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ .

On suppose que pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  on a  $\alpha_k \geq 2$ .

On considère le système  $(S)$  de  $n$  équations  $(E_1), \dots, (E_n)$  aux  $n$  inconnues  $u_1, \dots, u_n$  :

$$(S) \begin{cases} \alpha_1 u_1 & -u_2 & & & & = \beta_1 & (E_1) \\ -u_1 & +\alpha_2 u_2 & -u_3 & & & = \beta_2 & (E_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -u_{n-2} & +\alpha_{n-1} u_{n-1} & -u_n & = \beta_{n-1} & (E_{n-1}) \\ & & & & -u_{n-1} & +\alpha_n u_n & = \beta_n & (E_n) \end{cases}$$

1. Montrer qu'on définit  $n$  réels  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  de  $]0, 1]$  en posant :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \gamma_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1} - \gamma_k}$$

2. Soient  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les  $n$  réels définis par les égalités :

$$v_1 = \beta_1 \gamma_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad v_{k+1} = (\beta_{k+1} + v_k) \gamma_{k+1}$$

Montrer que  $(S)$  a une solution unique  $(u_1, \dots, u_n)$ , et qu'elle est donnée par les relations :

$$(\Sigma) : \quad u_n = v_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad u_k = v_k + \gamma_k u_{k+1}$$

3. Montrer qu'on a la majoration  $\sup_{1 \leq k \leq n} |u_k| \leq \frac{(n+1)^2}{2} \sup_{1 \leq k \leq n} |\beta_k|$

## Troisième partie

1. Soit  $t$  un élément de  $]0, 1[$ . Soit  $h$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$  tel que  $[t-h, t+h] \subset [0, 1]$ .

Montrer que  $|f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) - h^2 f''(t)| \leq \frac{h^4}{12} M_4(f)$ .

2. On reprend maintenant les notations de la question I-3. On rappelle que  $h = \frac{1}{n+1}$ .

Déduire de ce qui précède que pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  il existe un réel  $\varepsilon_k$  tel que :

$$-f(t_{k-1}) + (2 + h^2 a(t_k)) f(t_k) - f(t_{k+1}) = -h^2 b(t_k) + \varepsilon_k, \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_k| \leq \frac{h^4}{12} M_4(f).$$

3. On connaît déjà les valeurs  $f(t_0) = f(0) = \lambda$  et  $f(t_{n+1}) = f(1) = \mu$ .

On veut maintenant des valeurs approchées  $u_1$  de  $f(t_1)$ ,  $u_2$  de  $f(t_2)$ , ...,  $u_n$  de  $f(t_n)$ .

Pour cela, on résout le système suivant, "proche" de celui vérifié par les  $f(t_k)$  :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda, & u_{n+1} = \mu \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, & -u_{k-1} + (2 + h^2 a(t_k)) u_k - u_{k+1} = -h^2 b(t_k) \end{cases}$$

(a) Indiquer comment calculer successivement  $u_n, u_{n-1}, \dots, u_1$ .

(b) Préciser le système vérifié par les réels  $w_1 = f(t_1) - u_1, \dots, w_n = f(t_n) - u_n$ .

En déduire que  $\sup_{1 \leq k \leq n} |f(t_k) - u_k| \leq \frac{M_4(f)}{24(n+1)^2}$ .

4.  $\varphi_n$  ayant le sens vu en I-3, trouver  $K$  tel que :  $\sup_{[0,1]} |f - \varphi_n| \leq \frac{K}{(n+1)^2}$ . Conclusion ?