Puissances d'une matrice à paramètre

Soit β un nombre réel.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & \beta \\ -3-\beta & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Pour tout réel λ, on note $E_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = \lambda u\}$.

   Montrer que :

   - Si $\lambda \notin \{-1, 2\}$, E_λ est réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$.
   - E_2 est la droite vectorielle engendrée par $\varepsilon_1 = (1, 1-\beta, -2)$
   - E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par $\varepsilon_2 = (1, -2-\beta, 1)$.

2. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1-\beta & -2-\beta & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer P^{-1}.

3. On pose $\varepsilon_3 = (0, -2, -1)$.

   (a) Montrer que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que $(f - (\alpha - 1)\mathrm{Id})^2$ est de rang 1.

   (c) Vérifier que u et v forment une base de $\ker(f - (\alpha - 1)\mathrm{Id})^2$.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2-\beta & -2 & 1-\beta \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) Déterminer la matrice N de f dans la base (u, v, w).

   (c) Calculer N^n pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

   (d) En déduire M^n pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

5. On veut retouver M^n par une autre méthode. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3-\beta & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer A^n, pour tout entier naturel n.

   (b) Montrer que $M^n = \varphi(n)A^2 + n(\alpha - 1)^{n-1}A + (\alpha - 1)^n I_3$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

   (c) Calculer $\varphi(n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$, et retrouver ainsi une expression de M^n.