Translatées d'une application

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— Pour toute application f de E et pour tout réel t, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x+t)$.
On dit que l'application f_t, qui appartient à E, est une *translatée* de f.

— On note E_f le sous-espace de E engendré par les f_t, c'est-à-dire l'ensemble des applications g de E qui peuvent s'écrire au moins d'une manière sous la forme $g = \lambda_1 f_{t_1} + \lambda_2 f_{t_2} + \cdots + \lambda_p f_{t_p}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont des familles de p réels quelconques (p étant lui même un entier positif quelconque).

1. Dans chacun des cas suivants, vérifier que E_f est de dimension finie et en donner une base formée de fonctions du type f_t :
   (a) L'application f est définie par : $f(x) = \exp(x)$
   (b) L'application f est définie par : $f(x) = \sin x$
   (c) L'application f est définie par : $f(x) = x$.
2. Montrer que si f est de la forme $x \to f(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, où P est un polynôme et α un réel, alors E_f est de dimension finie.
3. On suppose que f est définie par $f(x) = \exp(\exp x)$.
   Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$ forment une famille libre. Qu'en déduit-on pour le sous-espace E_f ?
4. Dans cette question, on caractérise les familles libres finies de E à l'aide d'un déterminant.
   (a) Soit g_1, g_2 une famille libre de E. Montrer qu'on peut trouver deux réels distincts a_1 et a_2 tels que le déterminant $\begin{vmatrix} g_1(a_1) & g_1(a_2) \\ g_2(a_1) & g_2(a_2) \end{vmatrix}$ soit non nul.
   (b) Montrer plus généralement que si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ est une famille libre de E, on peut trouver n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincts deux à deux, tels que le déterminant Δ_n, carré d'ordre n et de terme général $\delta_{ij} = g_i(a_j)$, soit non nul.
5. Soit f un élément de E, tel que $\dim(E_f) = n \geqslant 1$. Soit $g_1, \ldots, g_n$ une base de E_f.
   (a) Montrer qu'il existe une unique suite $h_1, \ldots, h_n$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(x+t) = h_1(t)g_1(x) + h_2(t)g_2(x) + \cdots + h_n(t)g_n(x)$.
   (b) Montrer qu'on peut trouver n réels $a_1, \ldots, a_n$ distincts deux à deux tels que pour tout j de $\{1, \ldots, n\}$, h_j soit combinaison linéaire de $f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}$.
   Indication : utiliser 4b et considérer un certain système de Cramer.
   En conclure que $h_1, h_2, \ldots, h_n$ appartiennent à E_f.
   (c) Montrer que les dérivées successives de f sont dans E_f (utiliser 5a.)
   En déduire que f satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants.
6. Trouver tous les éléments f de E tels que $\dim E_f \leqslant 2$.