Transposition d'un endomorphisme

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Pour tout endomorphisme f de E, et toute forme linéaire φ sur E, on note ${}^{\mathrm{T}}f(\varphi) = \varphi \circ f$.

L'application $f \to {}^{\mathrm{T}}f$ est appelée *transposition* de $\mathcal{L}(E)$.

1. (a) Montrer que la transposition est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E^*)$.
   (b) Montrer que cette application est linéaire.
   (c) Montrer de deux manières différentes que cette application est injective.
   (d) Conclusion ?
2. Montrer que pour tous endomorphismes f et g de E, ${}^{\mathrm{T}}(g \circ f) = {}^{\mathrm{T}}f \circ {}^{\mathrm{T}}g$.
3. (a) Identifier l'application ${}^{\mathrm{T}}\mathrm{Id}_E$.
   (b) Soit f un automorphisme de E.
   Montrer que ${}^{\mathrm{T}}f$ est un automorphisme de E^* et que $({}^{\mathrm{T}}f)^{-1} = {}^{\mathrm{T}}(f^{-1})$.
   (c) Réciproquement soit f un endomorphisme de E.
   On suppose que ${}^{\mathrm{T}}f$ est un automorphisme de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
   Montrer de deux manières que f est un automorphisme de E.
4. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, {}^{\mathrm{T}}f$.
5. Soit $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E, et soit (e^*) la base duale (c'est-à-dire la base de E^* des « formes linéaires coordonnées », définies pas $e_i^*\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = x_i$).
   Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans la base (e).
   Montrer que la matrice de ${}^{\mathrm{T}}f$ dans la base (e^*) est ${}^{\mathrm{T}}A$.