Systèmes à diagonale strictement dominante

On note $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

On identifiera les éléments de $\mathbb{K}^n$ et les matrices colonnes correspondantes.

Pour tout $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{K}^n$, on note $\|Y\| = \max\{|y_j|,\ j = 1, \ldots, n\}$.

On considère le système (1) : $AX = B$ d'inconnue $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$.

On suppose que : $\forall\, i = 1, \ldots, n,\ |a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$.

On exprime cette propriété en disant que A est à *diagonale strictement dominante*.

1. Montrer que A est inversible.

   Indication : raisonner par l'absurde et considérer un vecteur X de $\mathbb{K}^n$, non nul, tel que $AX = 0$; utiliser la coordonnée de X qui est de module maximum.
2. On note $\widetilde{X}=(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ l'unique solution du système (1).

   En divisant la i-ième équation de (1) par a_{ii} et en la résolvant par rapport à x_i, on transforme (1) en un système équivalent (2) : $X = A^*X + B^*$.

   Préciser les coefficients a^*_{ij} de A^*, et b^*_i de B^*.
3. Montrer qu'il existe λ dans $[\,0, 1[$ tel que : $\forall\, i = 1, \ldots, n,\ \sum\limits_{j=1}^{n} |a^*_{ij}| \leq \lambda$.
4. Soit $X^{(0)} \in \mathbb{K}^n$. On définit une suite de $\mathbb{K}^n$ en posant : $\forall\, k,\ X^{(k+1)} = A^*X^{(k)} + B^*$.

   Pour tout entier k, on pourra noter $X^{(k)} = (x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \ldots, x^{(k)}_n)$.

   Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \|\widetilde{X} - X^{(k)}\| \leq \lambda^k \|\widetilde{X} - X^{(0)}\|$.

   En déduire que $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = \widetilde{X}$.
5. Application numérique
   (a) Résoudre le système (1) : $\left\{\begin{array}{rcl} 400x + 24y - 8z &=& 30 \\ 9x + 300y - 15z &=& 60 \\ 4x - 8y + 400z &=& 50 \end{array}\right.$

   On en donnera la solution exacte, et la solution approchée à 10^{-10} près.

   (b) Vérifier les hypothèses des questions précédentes.

   Écrire la forme $X = A^*X + B^*$ du système. Que vaut λ ?

   (c) On part de $X^{(0)} = (0, 0, 0)$. Préciser $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, et $X^{(4)}$.

   En considérant uniquement $X^{(1)}$, montrer que $\|\widetilde{X}\| \leqslant \frac{5}{23}$.

   A partir de quel entier k est-on certain que $\|\widetilde{X} - X^{(k)}\| \leq 10^{-16}$?